ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 44, No. 4, October, 1943

ON THE IMPORTANCE OF THE RELATION $[(A, B), (A, C)] < (A, [(B, C), (C, A), (A, B)])$ BETWEEN THREE ELEMENTS OF A STRUCTURE

BY HENRY LÖWIG

(Received January 8, 1940)

If A, B, and C are elements of an arbitrary structure then we have always

$$(1) \qquad [(A, B), (A, C)] \leqq (A, [(B, C), (C, A), (A, B)]).$$

(We will use in this paper the terminology and notation introduced in the paper (II); the marks $<$ and $>$ shall exclude the equality.) If the structure is especially a so-called Dedekind structure then in (1) the equality holds always i.e. the equation

$$(2) \qquad [(A, B), (A, C)] = (A, [(B, C), (C, A), (A, B)])$$

is generally valid. (See for instance (II), p. 413, equation (4).) In this paper we inquire whether conversely every structure in which the equation (2) is generally valid is a Dedekind structure, and how those structures in which (2) is not generally valid are characterized.

THEOREM 1. *If A, B, and C are elements of a structure, and between the cross-cuts (B, C), (C, A), and (A, B) there is at least one relation of inclusion then* (2) *is valid.*

PROOF. If for instance $(B, C) \leqq (C, A)$, then we have obviously $(B, C) \leqq (A, B)$ too. Therefore it is sufficient to consider the two cases $(B, C) \leqq (C, A)$ and $(C, A) \leqq (B, C)$.

1. Let (B, C) be $\leqq (C, A)$. In this case we have

$$[(B, C), (C, A), (A, B)] = [(C, A), (A, B)];$$

from this equation ensues immediately the asserted equation (2).

2. Let (C, A) be $\leqq (B, C)$. In this case we have obviously

$$[(B, C), (C, A), (A, B)] \leqq B$$

whence

$$(A, [(B, C), (C, A), (A, B)]) \leqq (A, B),$$

and consequently

$$(A, [(B, C), (C, A), (A, B)]) \leqq [(A, B), (A, C)].$$

But the last inequality implies together with the inequality (1) the asserted equation (2).

THEOREM 2. *If between the elements A, B, and C of a structure there is at least one relation of inclusion then* (2) *is valid.*

Theorem 2 ensues immediately from Theorem 1.

There are non-Dedekind structures in which nevertheless (2) is satisfied for arbitrary elements A, B, and C. We have for instance the

THEOREM 3: *In any non-Dedekind structure of the fifth order* (2) *is generally valid.*

PROOF. If Σ is a non-Dedekind structure of the fifth order then we can (see (I), §6) denote its elements by P, Q, R, S, and T in such a way that the following inequalities hold:

$$\tag{3} \begin{cases} P < Q, P < R, P < S, P < T; \\ Q < T; \\ R < S, R < T; \\ S < T. \end{cases}$$

From (3) it is directly evident that between any three elements of Σ there is always at least one relation of inclusion. Now it ensues immediately from Theorem 2 that Theorem 3 is true.

Theorem 3 will be still further generalized in the following.

THEOREM 4. *There are structures in which* (2) *is not generally valid.*

PROOF. We consider a set Λ consisting of 9 elements $E, L, M, N, X_1, Y, Z, X, F$. Now we will establish between these elements of Λ the following 24 proper relations of inclusion:

$$\tag{4} \begin{cases} E < L, E < M, E < N, E < X_1, E < Y, E < Z, E < F; \\ L < Y, L < Z, L < F; \\ M < Z, M < X_1, M < X, M < F; \\ N < X_1, N < X, N < Y, N < F; \\ X_1 < X, X_1 < F; \\ Y < F; \\ Z < F; \\ X < F. \end{cases}$$

One persuades himself easily that by the establishments (4) Λ becomes a partly ordered set. (See also figure on p. 575.) Moreover this partly ordered set is even a structure, and cross-cut and union of any two distinct elements of this structure can be found from the table on p. 576.

According to this table we have

$$[(X, Y), (X, Z)] = [N, M] = X_1,$$

and

$$(X, [(Y, Z), (Z, X), (X, Y)]) = (X, [L, M, N]) = (X, [Z, N]) = (X, F) = X.$$

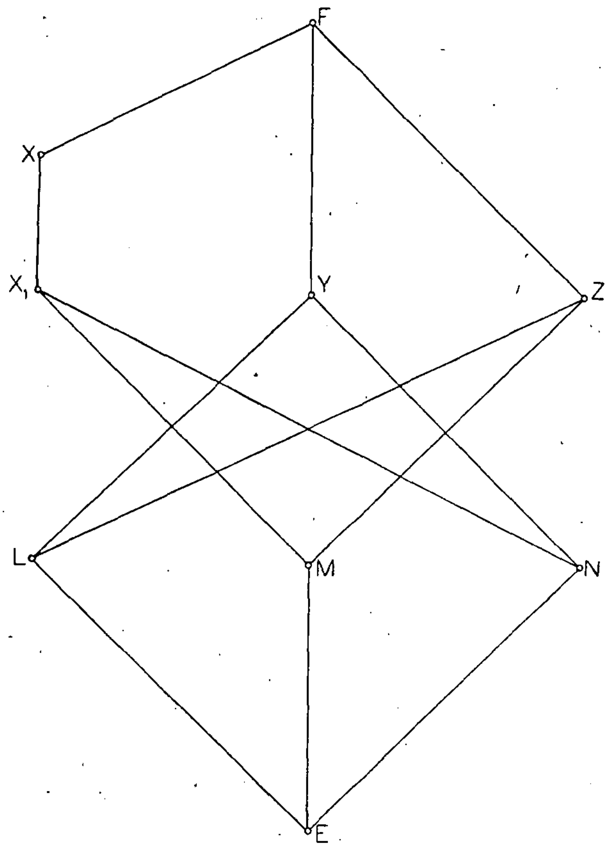
Hence

$$[(X, Y), (X, Z)] \neq (X, [(Y, Z), (Z, X), (X, Y)]).$$

In the structure Λ considered here the equation (2) is consequently not generally valid. (On the other hand one can easily persuade himself that the triples

X, Y, Z and X, Z, Y are the only triples of elements of Λ which do not satisfy the equation (2).)

In the following the marks E, L, M, N, X_1, Y, Z, X, F, and Λ shall have always the significance stated.



THEOREM 5. *If A, B, and C are elements of an arbitrary structure Σ then the set Λ' of the 9 elements E', L', M', N', X_1', Y', Z', X', F' defined by the equations*

$$(5)\qquad \begin{cases} E' = (A, B, C) \\ L' = (B, C) \\ M' = (C, A) \\ N' = (A, B) \\ X_1' = [(C, A), (A, B)] \\ Y' = [(A, B), (B, C)] \\ Z' = [(B, C), (C, A)] \\ X' = (A, [(B, C), (C, A), (A, B)]) \\ F' = [(B, C), (C, A), (A, B)] \end{cases}$$

is a substructure of Σ, *and if we assign to every element of* Λ *the corresponding accented element of* Λ', *then this correspondence is a homomorphism between* Λ *and* Λ'.

To prove Theorem 5 we have to demonstrate that the table below continues to be valid if we replace all elements appearing in it by the corresponding

	E	L	M	N	X_1	Y	Z	X	F	[ ]
E		L	M	N	X_1	Y	Z	X	F	E
L	E		Z	Y	F	Y	Z	F	F	L
M	E	E		X_1	X_1	F	Z	X	F	M
N	E	E	E		X_1	Y	F	X	F	N
X_1	E	E	M	N		F	F	X	F	X_1
Y	E	L	E	N	N		F	F	F	Y
Z	E	L	M	E	M	L		F	F	Z
X	E	E	M	N	X_1	N	M		F	X
F	E	L	M	N	X_1	Y	Z	X		F
( )	E	L	M	N	X_1	Y	Z	X	F	

accented elements. As this demonstration involves no difficulties we will content ourselves to prove the equation $[X', Y'] = F'$.

We have obviously $X' \geqq (C, A)$. Hence

$$[X', Y'] \geqq [(B, C), (C, A), (A, B)]$$

or

$$[X', Y'] \geqq F'. \tag{6}$$

On the other side we have $X' \leqq F'$ and $Y' \leqq F'$, and consequently also

$$[X', Y'] \leqq F'. \tag{7}$$

(6) and (7) yield the equation

$$[X', Y'] = F'$$

we have wanted to prove.

THEOREM 6. (Lemma.) *Let to every element U of a structure Σ be assigned an element U' of another structure Σ', where this correspondence is a homomorphism between Σ and Σ'. If $U < V$ implies $U' < V'$ then the given homomorphism is an isomorphism.*

PROOF. If $U \neq V$, and between U and V there exists a relation of inclusion then we have, according to the supposition, also $U' \neq V'$. But if we have $U \neq V$ without a relation of inclusion existing between U and V then we have certainly

$$(U, V) < U.$$

Therefore we have, according to what we have supposed in Theorem 6, also

$$(U', V') < U'.$$

The last inequality implies that also in this case $U' \neq V'$. Hence to distinct elements of Σ correspond always distinct elements of Σ'.

THEOREM 7. *If A, B, and C are elements of a structure Σ which do not satisfy the equation* (2) *then the homomorphism between Λ and Λ' existing according to Theorem* 5 *is an isomorphism.*

PROOF. According to Theorem 6 it is sufficient to demonstrate that none of the inequalities (4) turns into an equality if we replace both its sides by the corresponding accented elements. Moreover we can restrict ourselves to prove the 13 inequalities

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{lll} E' < L', & E' < M', & E' < N', \\ L' < Y', & L' < Z', & \\ M' < Z', & M' < X_1', & \\ N' < X_1', & N' < Y', & \\ X_1' < X', & & \\ Y' < F', & & \\ Z' < F', & & \\ X' < F', & & \end{array}\right.$$

because the other inequalities coming into question, namely the inequalities

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} E' < X_1', & E' < Y', & E' < Z', & E' < X', & E' < F', \\ L' < F', & & & & \\ M' < X', & M' < F', & & & \\ N' < X', & N' < F', & & & \\ X_1' < F' & & & & \end{array}\right.$$

ensue from the inequalities (8). The discussion shall be divided into 4 steps.

1. If the equation $E' = L'$ were valid we should have

$$(A, B, C) = (B, C)$$

and consequently

$$(B, C) \leqq (A, B);$$

hence, according to Theorem 1, the elements A, B, and C would satisfy the equation (2), contrarily to the supposition of Theorem 7. In corresponding way we can refute the hypotheses $E' = M'$ and $E' = N'$.

2. $L' = Y'$ or $(B, C) = [(A, B), (B, C)]$ would imply $(A, B) \leqq (B, C)$. Again it follows from Theorem 1 that the hypothesis is absurd. Similarly also the hypotheses $L' = Z'$, $M' = Z'$, $M' = X_1'$, $N' = X_1'$, and $N' = Y'$ yield contradictions.

3. According to the supposition of Theorem 7 we have $X_1' \neq X'$.

4. If the equation $X' = F'$ were valid then we should have

$$(L', X') = (L', F'),$$

and consequently

$$E' = L'.$$

This would contradict what we have proved under 1. Just so from the hypothesis $Y' = F'$ we can derive the equation $E' = M'$, from the hypothesis $Z' = F'$ the equation $E' = N'$, and by this a contradiction to what we have proved under 1.

Now the following Theorems 8, 9, and 10 are evident.

THEOREM 8. *Any structure in which the equation* (2) *is not generally valid contains at least one sub-structure of the ninth order having the same property.*

THEOREM 9. *Any structure of the ninth order in which the equation* (2) *is not generally valid is isomorphic with the structure* Λ.

THEOREM 10. *In any structure of at most eighth order the equation* (2) *holds for arbitrary elements* A, B, *and* C.

Theorem 10 represents the announced generalization of Theorem 3.

It is evident that we could investigate the equation

$$([A, B], [A, C]) = [A, ([B, C], [C, A], [A, B])] \tag{10}$$

dually corresponding to the equation (2) exactly in the same way as we have just explored the equation (2). Yet, while the Dedekind axiom

$$[(A, [B, C]), (B, C)] = ([A, (B, C)], [B, C])$$

is identical with its dual counterpart the corresponding assertion about the equation (2) is not true.

THEOREM 11. *In our structure* Λ *the equation* (10) *is generally valid.*

The proof follows easily from the dual counterpart of Theorem 9. Of course Theorem 11 can also be verified simply by the table on p. 576.

THEOREM 12. *The assertion that in a structure the equation* (2) *holds for arbitrary* *elements, A, B, and C, and the assertion dually corresponding to this assertion are not equivalent.*

PROOF. See Theorem 11.

PRAGUE

References

(I) Richard Dedekind, *Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe.* Mathematische Annalen 53(1900), p. 371–403.

(II) Oystein Ore, *On the foundation of abstract algebra.* I. Annals of Mathematics 36(1935), p. 406–437.

2

Separatum.

ACTA

LITTERARUM AC SCIENTIARUM

REGIAE UNIVERSITATIS HUNGARICAE FRANCISCO-JOSEPHINAE

SECTIO

SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

Heinrich Löwig

Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl.

TOM. VII. FASC. I.

27. VI. 1934.

SZEGED.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM ÉS
A ROTHERMERE-ALAP TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA:
AZ EGYETEM BARÁTAINAK EGYESÜLETE.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK

SZERKESZTIK:

KERÉKJÁRTÓ BÉLA — RIESZ FRIGYES.

VII. KÖTET. I. FÜZET.

1934. VI. 27.

INDEX — TARTALOM.

SZEGEDI VÁROSI NYOMDA ÉS KÖNYVKIADÓ R.-T. 34—3208

Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl.

Von HEINRICH LÖWIG in Prag.

In dieser Abhandlung soll gezeigt werden, daß viele Sätze, welche man bisher nur für den Hilbertschen Raum bewiesen hat, auch für beliebige euklidische Räume, d. h. lineare metrische Räume, in denen ein inneres Produkt definiert ist, gelten, oder — mit andern Worten — daß die Voraussetzung der Separabilität des Raumes, die man beim Beweise dieser Sätze bisher zu machen pflegte, unwesentlich ist. Im ersten Paragraphen mögen zunächst einige Vorbemerkungen über allgemeine komplexe lineare metrische Räume vorausgeschickt werden. Im zweiten Pragraphen werden sodann Sätze über den komplexen Hilbertschen Raum angeführt, welche man auf beliebige komplexe euklidische Räume übertragen kann, ohne dabei den Wohlordnungssatz zu benützen. In § 3 werden schließlich noch einige Sätze über komplexe euklidische Räume unter Benützung des Wohlordnungssatzes abgeleitet.

§ 1. Vorbemerkungen über allgemeine komplexe lineare metrische Räume.

Eine Menge $\mathfrak{R}$ von Elementen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ heiße ein *komplexer linearer Raum,* wenn in ihr eine Addition $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$ und eine Multiplikation $a\mathfrak{x}$ mit einer komplexen Zahl a definiert sind und wenn diese beiden Rechenoperationen den Gesetzen der affinen Vektoralgebra genügen. (Elemente linearer Räume wollen wir im folgenden stets mit kleinen deutschen Buchstaben, komplexe Zahlen mit kleinen lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnen.)

Ist außerdem jedem Element $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$ eine nicht negative reelle Zahl $|\mathfrak{r}|$ (absoluter Betrag des Elements $\mathfrak{r}$) derart zugeordnet, daß die Bedingungen

$$|\mathfrak{r}| > 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{r} \neq 0 \tag{1}$$

(das Zeichen 0 soll auch das Nullelement von $\mathfrak{R}$ bedeuten)

$$|\mathfrak{r} + \mathfrak{y}| \leq |\mathfrak{r}| + |\mathfrak{y}| \tag{2}$$

und

$$|a\mathfrak{r}| = |a| \cdot |\mathfrak{r}| \tag{3}$$

(a beliebig komplex) erfüllt sind, dann wollen wir $\mathfrak{R}$ einen *komplexen linearen metrischen Raum* nennen.

Definition 1. *Die Teilmenge $\mathfrak{M}$ des komplexen linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ heiße* isomorph *mit der Teilmenge $\mathfrak{N}$ des komplexen linearen metrischen Raumes $\mathfrak{S}$, wenn zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von der Beschaffenheit hergestellt werden kann, daß in dem Falle, daß die endlich vielen Elemente $\mathfrak{r}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ von $\mathfrak{M}$ beziehentlich den Elementen $\mathfrak{y}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ von $\mathfrak{N}$ zugeordnet sind, für beliebige komplexe Zahlen a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ die Gleichung*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \mathfrak{r}_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \mathfrak{y}_k\right| \tag{4}$$

besteht.

(Die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{R}$ von der Form $\sum_{k=1}^{n} a_k \mathfrak{r}_k$ mit $\mathfrak{r}_k \in \mathfrak{M}$ wollen wir in Anlehnung an Hausdorff **2**, S. 295 — siehe Literaturverzeichnis am Schlusse — die „lineare Hülle" der Menge $\mathfrak{M}$ nennen. — Das Wort „isomorph" wird hier in einem andern Sinne gebraucht als bei Banach **1**, S. 180. Was hier isomorph heißt, nennt Banach „äquivalent".)

Definition 2. *Ist $\mathfrak{r}_0$ irgendein Element des komplexen linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ und ε eine beliebige positive reelle Zahl, dann heiße die Menge der Elemente $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$, welche der Ungleichung*

$$|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0| < \varepsilon \tag{5}$$

genügen, eine starke Umgebung *der Stelle $\mathfrak{r}_0$.*

Daher heißt $\mathfrak{r}_0$ starke Häufungsstelle einer Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$, wenn jede starke Umgebung von $\mathfrak{r}_0$ mindestens ein von $\mathfrak{r}_0$ verschiedenes Element von $\mathfrak{M}$ enthält. Die Menge $\mathfrak{M}$ heißt starkabgeschlossen, wenn sie alle ihre starken Häufungspunkte enthält.

Eine Folge $\mathfrak{r}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von Elementen von $\mathfrak{R}$ heißt stark konvergent gegen das Element $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$, in Zeichen

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{r}_n = \mathfrak{r}, \tag{6}$$

wenn jede starke Umgebung von $\mathfrak{r}$ von einer gewissen Stelle angefangen alle Glieder der Folge $\mathfrak{r}_n$ enthält; das bedeutet aber:

$$\lim_{n \to \infty} |\mathfrak{r}_n - \mathfrak{r}| = 0. \tag{7}$$

Offenbar ist eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ dann und nur dann starkabgeschlossen, wenn aus $\mathfrak{r}_n \in \mathfrak{M}$ und $\lim_{n \to \infty} \mathfrak{r}_n = \mathfrak{r}$ stets $\mathfrak{r} \in \mathfrak{M}$ folgt.

Die Menge der starken Häufungsstellen der linearen Hülle einer Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ heiße — wieder in Anlehnung an Hausdorff **2**, S. 295 — die starkabgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{M}$.

Definition 3. *Eine Folge $\mathfrak{r}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von Elementen von $\mathfrak{R}$ heiße eine* starke Fundamentalfolge, *wenn*

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} |\mathfrak{r}_m - \mathfrak{r}_n| = 0 \tag{8}$$

ist.

Definition 4. *Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ heiße* starkvollständig, *wenn es zu jeder starken Fundamentalfolge $\mathfrak{r}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von $\mathfrak{M}$ ein Element $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{M}$ mit*

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{r}_n = \mathfrak{r} \tag{6}$$

gibt.

Aus der Starkvollständigkeit folgt die Starkabgeschlossenheit, aber nicht umgekehrt; ferner ist mit einer starkvollständigen Menge offenbar auch jede isomorphe Menge starkvollständig, während einer nur starkabgeschlossenen Menge diese Eigenschaft nicht zukommen muß. Ist die starkabgeschlossene lineare Hülle $\mathfrak{P}$ einer Menge $\mathfrak{M}$ starkvollständig, dann wollen wir $\mathfrak{P}$ auch die *starkvollständige lineare Hülle* von $\mathfrak{M}$ nennen. Andernfalls wollen wir sagen, daß die starkvollständige lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}$ nicht existiert. Offenbar gilt der

Satz 1. *Sind zwei Teilmengen komplexer linearer metrischer Räume isomorph, dann sind auch ihre starkvollständigen linearen Hüllen isomorph, falls sie existieren.*

Denn bei der in Definition 1 erwähnten Zuordnung entspricht jeder starken Fundamentalfolge der linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ eine starke Fundamentalfolge der linearen Hülle von $\mathfrak{N}$ und umgekehrt.

Es folgt weiter, daß *diese Zuordnung auf genau eine Weise zu einer entsprechenden Zuordnung zwischen den starkvollständigen linearen Hüllen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{R}$ erweitert werden kann.*

Ist ein komplexer linearer metrischer Raum selbst starkvollständig, dann fallen die Begriffe der Starkabgeschlossenheit und der Starkvollständigkeit einer Teilmenge zusammen; daher ist auch die starkabgeschlossene lineare Hülle einer Teilmenge von selbst starkvollständig.

Jeden komplexen linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}$, welcher nicht starkvollständig ist, kann man zu einem starkvollständigen komplexen linearen metrischen Raum erweitern; d. h. man kann einen starkvollständigen komplexen linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}^*$ angeben, welcher eine mit $\mathfrak{R}$ isomorphe lineare Mannigfaltigkeit enthält. Man betrachte als die Elemente von $\mathfrak{R}^*$ die Gesamtheiten äquivalenter starker Fundamentalfolgen von $\mathfrak{R}$. (Zwei starke Fundamentalfolgen $\mathfrak{x}_n^{(1)}$ und $\mathfrak{x}_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sollen äquivalent heißen, wenn $\lim\limits_{n \to \infty} |\mathfrak{x}_n^{(1)} - \mathfrak{x}_n^{(2)}| = 0$ ist.) Enthalten zwei Elemente $\mathfrak{x}^*$ und $\mathfrak{y}^*$ von $\mathfrak{R}^*$ die starken Fundamentalfolgen $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\mathfrak{y}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von $\mathfrak{R}$, dann seien $\mathfrak{x}^* + \mathfrak{y}^*$ und $a\mathfrak{x}^*$ die Gesamtheiten derjenigen starken Fundamentalfolgen von $\mathfrak{R}$, welche mit $\mathfrak{x}_n + \mathfrak{y}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ bzw. mit $a\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ äquivalent sind, und es sei

$$(9) \qquad |\mathfrak{x}^*| = \lim_{n \to \infty} |\mathfrak{x}_n|.$$

Man kann sich leicht überlegen, daß diese Definitionen alle eingangs gemachten Voraussetzungen über komplexe lineare metrische Räume erfüllen und daß der so definierte komplexe lineare metrische Raum wirklich starkvollständig ist. Diejenigen Elemente von $\mathfrak{R}^*$, welche aus starken Fundamentalfolgen von $\mathfrak{R}$ bestehen, welche in $\mathfrak{R}$ auch stark konvergieren, bilden eine lineare Mannigfaltigkeit, welche mit $\mathfrak{R}$ isomorph ist, und $\mathfrak{R}^*$ ist die starkvollständige lineare Hülle dieser linearen Mannigfaltigkeit. Ersetzt man jedes der genannten Elemente $\mathfrak{x}^*$ von $\mathfrak{R}^*$ durch das Element von $\mathfrak{R}$, gegen welches die starken Fundamentalfolgen von $\mathfrak{R}$, deren Gesamtheit $\mathfrak{x}^*$ ist, konvergieren, dann wird $\mathfrak{R}$ selbst eine lineare Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{R}^*$ und daher $\mathfrak{R}^*$ eine Erweiterung von $\mathfrak{R}$; wir wollen diese Erweiterung die *kleinste starkvollständige Erweiterung* von $\mathfrak{R}$ nennen.

Ist jedem Element $\mathfrak{x}$ eines komplexen linearen Raumes $\mathfrak{R}$

ein Element $A\mathfrak{x}$ eines komplexen linearen Raumes $\mathfrak{S}$ zugeordnet und gelten dabei für beliebige $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Gleichungen

$$(10) \qquad A(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = A\mathfrak{x} + A\mathfrak{y}$$

und

$$(11) \qquad A(a\mathfrak{x}) = a(A\mathfrak{x}),$$

dann heiße diese Zuordnung A eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}$ *in* $\mathfrak{S}$; wenn dabei $A\mathfrak{x}$ wirklich ganz $\mathfrak{S}$ durchläuft, eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}$ *auf* $\mathfrak{S}$. Sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ komplexe lineare *metrische* Räume und ist die Menge der Zahlen $|A\mathfrak{x}|$ mit $|\mathfrak{x}| \leq 1$ beschränkt, dann heiße die lineare Abbildung A beschränkt und die obere Grenze von $|A\mathfrak{x}|$ für $|\mathfrak{x}| \leq 1$ werde mit $|A|$ (absoluter Betrag der linearen Abbildung A) bezeichnet. Durch diese Festsetzung wird die Menge der beschränkten linearen Abbildungen von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{S}$ selbst zu einem komplexen linearen metrischen Raume. Ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$, dann heiße A auch ein *linearer Operator* in $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{S}$ der komplexe lineare metrische Raum der komplexen Zahlen, dann heiße A ein *lineares Funktional* in $\mathfrak{R}$.

Definition 5. *Es seien L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ endlich viele beschränkte lineare Funktionale in $\mathfrak{R}$ und ε eine beliebige positive reelle Zahl. Ferner sei $\mathfrak{x}_0$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$. Dann heiße die Gesamtheit der Stellen $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$, welche den Ungleichungen*

$$(12) \qquad |L_k(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, eine schwache Umgebung der Stelle $\mathfrak{x}_0$.

(Diese Definition ist eine Verallgemeinerung der von J. v. Neumann **6**, S. 379 gegebenen Definition. Man kann sich leicht überzeugen, daß dieser Umgebungsbegriff im allgemeinen Falle ebenso wie in dem von J. v. Neumann behandelten Spezialfalle den vier Hausdorffschen Umgebungsaxiomen genügt.)

Daher heißt $\mathfrak{x}_0$ *schwache Häufungsstelle* einer Menge $\mathfrak{M}$, wenn jede schwache Umgebung von $\mathfrak{x}_0$ mindestens ein von $\mathfrak{x}_0$ verschiedenes Element von $\mathfrak{M}$ enthält. Eine Menge $\mathfrak{M}$ heißt *schwachabgeschlossen*, wenn sie alle ihre schwachen Häufungsstellen enthält. Eine Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ heißt *schwach konvergent* gegen das Element $\mathfrak{x}$, in Zeichen

$$(13) \qquad \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x},$$

wenn jede schwache Umgebung von $\mathfrak{x}$ von einer gewissen Stelle angefangen alle Glieder der Folge $\mathfrak{x}_n$ enthält. Wie man sich leicht überlegt, gilt der

Satz 2. *Für das Bestehen der Gleichung*

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x} \tag{13}$$

ist notwendig und hinreichend, daß für jedes beschränkte lineare Funktional L in $\mathfrak{R}$ die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} L\mathfrak{x}_n = L\mathfrak{x} \tag{14}$$

gelte.

Wie J. v. Neumann **6**, S. 380, 381 zeigt, muß ein schwaches Häufungselement einer Menge nicht schwaches Grenzelement einer Teilfolge der Menge sein.

Wir müssen nun einen Satz aus der Theorie der linearen metrischen Räume (S. z. B. Hausdorff **2**, S. 306) benützen, der folgendermaßen lautet:

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Teilmenge eines komplexen linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{x}_0$ ein Element von $\mathfrak{R}$, welches nicht der starkabgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ angehört. Dann gibt es stets mindestens ein beschränktes lineares Funktional L in $\mathfrak{R}$ von der Beschaffenheit, daß für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ $L\mathfrak{x} = 0$ ist, während $L\mathfrak{x}_0 \neq 0$ ist.*

Dieser Satz wird in den meisten Abhandlungen nur für *reelle* lineare metrische Räume ausgesprochen und bewiesen. Aus der Giltigkeit des Satzes für *reelle* lineare metrische Räume folgt aber leicht auch seine Giltigkeit für *komplexe* lineare metrische Räume. Man kann ja jeden komplexen linearen metrischen Raum auch als einen reellen linearen metrischen Raum betrachten; daher gibt es unter den Voraussetzungen des Satzes 3 ein *reelles* beschränktes lineares Funktional R (die Gleichung $R(a\mathfrak{x}) = a(R\mathfrak{x})$ gilt jetzt nur für *reelles* a) von der Beschaffenheit, daß $R\mathfrak{x} = 0$ ist, wenn $\mathfrak{x}$ in der komplexen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ enthalten ist, während $R\mathfrak{x}_0 \neq 0$ ist. Nun setze man

$$L\mathfrak{x} = R\mathfrak{x} - iR(i\mathfrak{x}).$$

Dann ist L ein lineares Funktional von der in Satz 3 geforderten Beschaffenheit.

Aus Satz 3 folgt sofort der

Satz 4. *Jede schwache Häufungsstelle einer Menge $\mathfrak{M}$ gehört der starkabgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ an.*

Gehört nämlich $\mathfrak{x}_0$ nicht der starkabgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ an, dann sei L ein beschränktes lineares Funktional in $\mathfrak{R}$ mit $L\mathfrak{x} = 0$ für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ und $L\mathfrak{x}_0 \neq 0$. Dann ist für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$

$$|L(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)| = |L\mathfrak{x}_0| \neq 0;$$

die Ungleichung

$$|L(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)| < \varepsilon$$

kann daher nicht für jede positive reelle Zahl ε durch ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ erfüllt werden.

Ein Spezialfall des Satzes 4 ist der

Satz 5. *Ist*

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}, \tag{13}$$

dann gehört $\mathfrak{x}$ der starkabgeschlossenen linearen Hülle der Menge der Elemente $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ an.

Dieser spezielle Satz wird auch von Banach **1**, S. 134 ausgesprochen. Sein Beweis folgt hier einfach aus der Bemerkung, daß beim Bestehen der Gleichung (13) $\mathfrak{x}$ schwache Häufungsstelle der Menge der Elemente ist, welche in der Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ vorkommen, wenn diese Menge nicht nur endlich viele von $\mathfrak{x}$ verschiedene Elemente enthält.

Aus Satz 4 folgt ferner der

Satz 6. *Jede starkabgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit ist auch schwachabgeschlossen.*

Wir wollen daher von nun an eine starkabgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit schlechthin als *abgeschlossen* bezeichnen. Ebenso dürfen wir statt „starkabgeschlossene lineare Hülle" kurz „abgeschlossene lineare Hülle" sagen. Satz **6** stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes dar, den E. Schmidt **10** für den Hilbertschen Raum bewiesen hat. (Vergleiche auch J. v. Neumann **6**, S. 396.)

Definition 6. *Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ heiße* **schwachvollständig**, *wenn sie in der kleinsten starkvollständigen Erweiterung von $\mathfrak{R}$ schwachabgeschlossen ist.*

(Anmerkung. Die Worte „schwachabgeschlossen" und „schwachvollständig" werden sonst vielfach in der Literatur in einem anderen Sinne gebraucht. Wir kommen weiter unten nochmals darauf zurück.)

Jede schwachvollständige Menge ist schwachabgeschlossen, während das Umgekehrte nicht gelten muß. Mit einer schwachvollständigen Menge ist auch jede isomorphe Menge schwachvollständig, während einer schwachabgeschlossenen Menge diese Eigenschaft nicht zukommen muß. Aus Definition 6 folgt ferner unmittelbar, daß jede starkvollständige lineare Mannigfaltigkeit auch schwachvollständig ist. Wir wollen daher von nun an eine starkvollständige lineare Mannigfaltigkeit schlechthin als „vollständig" bezeichnen. Ebenso wollen wir die Worte „starkvollständige lineare Hülle" und „kleinste starkvollständige Erweiterung" durch die Worte „vollständige lineare Hülle" und „kleinste vollständige Erweiterung" ersetzen. — In einem vollständigen komplexen linearen metrischen Raume sind die Begriffe Schwachabgeschlossenheit und Schwachvollständigkeit einer Teilmenge und ebenso die Begriffe Abgeschlossenheit und Vollständigkeit einer linearen Mannigfaltigkeit identisch.

Definition 7. *Eine Folge* $\mathfrak{x}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *von Elementen von* $\mathfrak{R}$ *heiße eine* **schwache Fundamentalfolge,** *wenn für jedes beschränkte lineare Funktional* L *in* $\mathfrak{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} L\mathfrak{x}_n$ *existiert.*

Jede schwache Fundamentalfolge ist beschränkt. Für reelle lineare metrische Räume ist dieser Satz bekannt; aus seiner Giltigkeit für reelle lineare metrische Räume folgt aber auch die Giltigkeit für komplexe lineare metrische Räume: man braucht nur statt der Werte der beschränkten linearen Funktionale $L\mathfrak{x}$ deren reelle Teile zu betrachten.

Es kann vorkommen, daß eine schwache Fundamentalfolge eines *vollständigen* komplexen linearen metrischen Raumes nicht schwach konvergiert. Es sei $\mathfrak{R}$ die Menge der *Nullfolgen* $\mathfrak{x}=(x_1, x_2, \ldots)$ mit $|\mathfrak{x}| = \sup\limits_{n=1,2,3,\ldots} |x_n|$. Dieser komplexe lineare metrische Raum ist vollständig; trotzdem bilden seine Elemente $\mathfrak{x}_1=(1,0,0,\ldots)$, $\mathfrak{x}_2=(1,1,0,0,\ldots)$, $\mathfrak{x}_3=(1,1,1,0,0,\ldots)$, ... eine schwache Fundamentalfolge, welche nicht schwach konvergiert. Während man einen komplexen linearen metrischen Raum stets so erweitern kann, daß jede *starke* Fundamentalfolge stark konvergiert, gilt von den *schwachen* Fundamentalfolgen das Entsprechende nicht. Es gilt vielmehr der

Satz 7. *Ist* $\mathfrak{x}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *eine schwache Fundamentalfolge eines vollständigen komplexen linearen metrischen Raumes* $\mathfrak{R}$, *welche nicht schwach konvergiert, dann ist es auch unmöglich,* $\mathfrak{R}$ *so zu erweitern, daß diese schwache Fundamentalfolge schwach konvergent wird.*

(Man kann daher $\mathfrak{R}$ auch nicht zu einem komplexen linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}^*$ erweitern, der mit seinem bikonjugierten Raum übereinstimmt.)

Der Beweis des Satzes 7 ergibt sich unmittelbar aus Satz 5.

S. Mazur 4 nennt einen (reellen) linearen metrischen Raum schwachvollständig, wenn in ihm jede schwache Fundamentalfolge schwach konvergiert. Unser Satz 7 sagt aus, daß ein komplexer linearer metrischer Raum, der zwar vollständig, aber nicht im Mazurschen Sinne schwachvollständig ist, nicht zu einem im Mazurschen Sinne schwachvollständigen komplexen linearen metrischen Raume erweitert werden kann.

§ 2. Sätze über komplexe euklidische Räume, die ohne Benützung des Wohlordnungssatzes bewiesen werden können.

Definition 8. *Eine skalare Funktion* $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ *zweier veränderlicher Elemente eines komplexen linearen Raumes heiße eine hermiteische bilineare Funktion, wenn die Gleichungen*

$$f(\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}) = f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}) + f(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}), \tag{14}$$

$$f(a\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = a f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{15}$$

und

$$f(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \overline{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} \tag{16}$$

($\bar{a}$ *bedeutet die zu* a *konjugierte komplexe Zahl) allgemein gelten.*

Ist $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eine hermiteische bilineare Funktion, dann ist, wie Gleichung (16) lehrt, $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ stets eine *reelle* Zahl.

Satz 8. *Ist die zu einer hermiteischen bilinearen Funktion* $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ *in einem komplexen linearen Raume* $\mathfrak{R}$ *gehörige hermiteische quadratische Form (oder kurz hermiteische Form)* $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ *positiv definit — d. h. ist stets* $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) > 0$ *für* $\mathfrak{x} \neq 0$ *— dann gelten für beliebige Elemente* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{y}$ *von* $\mathfrak{R}$ *die Ungleichungen*

$$|f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|^2 \leq f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) \tag{17}$$

und

$$\sqrt{f(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}, \mathfrak{x}+\mathfrak{y})} \leq \sqrt{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})} + \sqrt{f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})}. \tag{18}$$

Beim Beweise der Ungleichungen (17) und (18) hat man nur die Nichtnegativdefinitheit der quadratischen Form $f(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y}, \lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y})$ in den beiden reellen Veränderlichen λ und μ zu beachten.

Die Ungleichung (18) sagt weiter aus: ist die hermiteische bilineare Funktion $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ in einem komplexen linearen Raume $\mathfrak{R}$ so beschaffen, daß die hermiteische Form $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ positiv definit ist, dann kann man $\mathfrak{R}$ dadurch zu einem komplexen linearen *metrischen* Raume machen, daß man $|\mathfrak{x}| = \sqrt{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})}$ setzt. (Daß dann auch die Gleichung (3) erfüllt ist, folgt aus den Gleichungen (15) und (16).)

Definition 9. *Ein komplexer linearer metrischer Raum, der auf die eben angegebene Weise definiert werden kann, heiße ein komplexer euklidischer Raum. Die Funktion $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ heiße dabei das innere Produkt der beiden Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ und werde kurz mit $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ bezeichnet.*

Spezielle komplexe euklidische Räume sind der n-dimensionale komplexe euklidische Raum (n eine natürliche Zahl) und der komplexe Hilbertsche Raum. Nach der Definition des inneren Produktes besteht allgemein die Gleichung

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = |\mathfrak{x}|^2. \tag{19}$$

Ferner folgt aus Ungleichung (17) die Ungleichung

$$|(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})| \leq |\mathfrak{x}| \cdot |\mathfrak{y}|, \tag{20}$$

welche man die *Schwarzsche Ungleichung* zu nennen pflegt.

Satz 9. *Ist ein komplexer linearer metrischer Raum $\mathfrak{R}$ euklidisch, dann ist auch seine kleinste vollständige Erweiterung $\mathfrak{R}^*$ euklidisch.*

Ist nämlich $\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{y}^* \in \mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{R}$, $\mathfrak{y}_n \in \mathfrak{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}^*$ und $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{y}_n = \mathfrak{y}^*$, dann braucht man, um die Richtigkeit des Satzes 9 einzusehen, nur in $\mathfrak{R}^*$ das innere Produkt durch die Gleichung

$$(\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*) = \lim_{n\to\infty} (\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n)$$

zu definieren.

Satz 10. *Zwei Teilmengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ komplexer euklidischer Räume sind dann und nur dann isomorph* (Definition 1), *wenn zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von der Beschaffenheit hergestellt werden kann, daß in dem Falle, daß den Elementen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ von $\mathfrak{M}$ die Elemente $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ von $\mathfrak{N}$ zugeordnet sind, stets die Gleichung*

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) \tag{21}$$

besteht.

Daß die angeführte Bedingung notwendig ist, folgt aus der Identität

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \left|\frac{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}}{2}\right|^2 - \left|\frac{\mathfrak{x}-\mathfrak{y}}{2}\right|^2 + i\left|\frac{\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}}{2}\right|^2 - i\left|\frac{\mathfrak{x}-i\mathfrak{y}}{2}\right|^2;$$

daß sie auch hinreichend ist, folgt daraus, daß man aus den Gleichungen (21) mit Hilfe von (19) das Bestehen jeder Gleichung von der Form (4) beweisen kann.

Satz 11. *Zu jedem beschränkten linearen Funktional L eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ gibt es ein* (und daher auch nur ein) *erzeugendes Element, d. h. ein Element $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{R}$ von der Beschaffenheit, daß für jedes Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$*

$$L\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u}) \tag{22}$$

ist.

Daß Satz 11 für endlichdimensionale komplexe euklidische Räume und für den komplexen Hilbertschen Raum gilt, ist bekannt. (S. z. B. F. Riesz 9, S. 28.) Um nun den Satz auch für beliebige vollständige komplexe euklidische Räume zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß aus der Giltigkeit des Satzes für endlichdimensionale komplexe euklidische Räume und für den komplexen Hilbertschen Raum speziell folgender Satz folgt:

Satz 12. *Ist L ein beschränktes lineares Funktional in einem endlichdimensionalen komplexen euklidischen Raume oder im komplexen Hilbertschen Raume, dann gibt es stets ein Element $\mathfrak{u}$ des betreffenden Raumes mit $|\mathfrak{u}| = |L|$ und $L\mathfrak{u} = |\mathfrak{u}|^2$.*

Weiter beweisen wir den folgenden

Satz 13. *Gibt es zu einem beschränkten linearen Funktional L in einem komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ ein Element $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{R}$ mit $|\mathfrak{u}| = |L|$ und $L\mathfrak{u} = |\mathfrak{u}|^2$, dann ist identisch*

$$L\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u}). \tag{22}$$

Es sei zunächst $(\mathfrak{x}, \mathfrak{u}) = 0$ und $\mathfrak{x} \neq 0$. Dann ist für jede komplexe Zahl λ

$$|L(\mathfrak{u} + \lambda\mathfrak{x})| \leq |L| \cdot |\mathfrak{u} + \lambda\mathfrak{x}|$$

und daher

$$\left||L|^2 + \lambda(L\mathfrak{x})\right|^2 \leq |L|^2 (|L|^2 + |\lambda|^2 |\mathfrak{x}|^2).$$

Nun setze man insbesondere $\lambda = \frac{\overline{(L\mathfrak{x})}}{|\mathfrak{x}|^2}$. Dann folgt

$$\left(|L|^2 + \frac{|L\mathfrak{x}|^2}{|\mathfrak{x}|^2}\right)^2 \leq |L|^2\left(|L|^2 + \frac{|L\mathfrak{x}|^2}{|\mathfrak{x}|^2}\right)$$

oder

$$|L\mathfrak{x}|^2(|L|^2|\mathfrak{x}|^2 + |L\mathfrak{x}|^2) \leq 0,$$

also $L\mathfrak{x} = 0$. Damit ist die Gleichung (22) für den Fall bewiesen, daß $(\mathfrak{x}, \mathfrak{u}) = 0$ ist. Ist jetzt $\mathfrak{x}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$, dann ist

$$(|\mathfrak{u}|^2\mathfrak{x} - (\mathfrak{x}, \mathfrak{u})\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = 0,$$

daher nach dem eben Bewiesenen

$$L(|\mathfrak{u}|^2\mathfrak{x} - (\mathfrak{x}, \mathfrak{u})\mathfrak{u}) = 0,$$

oder

$$|\mathfrak{u}|^2 L\mathfrak{x} - (\mathfrak{x}, \mathfrak{u}) L\mathfrak{u} = 0,$$

oder weil $L\mathfrak{u} = |\mathfrak{u}|^2$ ist,

$$L\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u}), \tag{22}$$

wie gezeigt werden sollte.

Andererseits kann Satz 12 auf beliebige *vollständige* komplexe euklidische Räume übertragen werden. Es sei L ein beschränktes lineares Funktional in einem vollständigen komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$. Dann gibt es eine Folge von Elementen $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von $\mathfrak{R}$ mit $|\mathfrak{x}_n| = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} L\mathfrak{x}_n = |L|$. Hierauf sei $\mathfrak{M}$ die abgeschlossene lineare Hülle der Elemente $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Dann ist die obere Grenze von $|L\mathfrak{x}|$ für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ und $|\mathfrak{x}| \leq 1$ genau gleich $|L|$. Andererseits ist aber $\mathfrak{M}$ entweder ein endlichdimensionaler komplexer euklidischer Raum oder ein komplexer Hilbertscher Raum. Daher gibt es nach Satz 12 ein Element $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{M}$ mit $|\mathfrak{u}| = |L|$ und $L\mathfrak{u} = |\mathfrak{u}|^2$. Damit ist aber die zu Beginn dieses Absatzes angeführte Verallgemeinerung des Satzes 12 als richtig nachgewiesen. Aus dieser Verallgemeinerung des Satzes 12 und aus Satz 13 ergibt sich jetzt sofort der zu beweisende Satz 11.

D e f i n i t i o n 10. *Eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ eines komplexen euklidischen Raumes heiße* r e g u l ä r, *wenn man jedes Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf $\mathfrak{M}$ in eine Tangentialkomponente $\mathfrak{t}$ und eine Normalkomponente $\mathfrak{n}$ zerlegen kann, d. h. wenn man zu jedem Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ zwei ebensolche Elemente $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ angeben kann, so daß*

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{t} + \mathfrak{n} \tag{23}$$

ist, $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{M}$ angehört und $\mathfrak{n}$ zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist.

Zwei Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eines komplexen euklidischen Raumes werden hier orthogonal genannt, wenn $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ ist; dann ist wegen (16) auch $(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = 0$. Es ist klar, daß für eine bestimmte lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ eine Zerlegung eines Elements $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ von der hier betrachteten Art stets höchstens auf *eine* Weise möglich ist.

S a t z 14. *Für die Regularität einer linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ ist notwendig, aber nicht hinreichend, daß $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}$ abgeschlossen sei.*

B e w e i s. Es sei $\mathfrak{M}$ regulär, $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$. Dann sei

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{t} + \mathfrak{n} \tag{23}$$

die in Definition 10 angeführte Zerlegung von $\mathfrak{x}$. Aus der Gleichung $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$ kann man auf bekannte Weise schließen, daß auch

$$\lim_{n\to\infty} (\mathfrak{x}_n, \mathfrak{n}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{n})$$

ist. Weil aber nach der Definition von $\mathfrak{n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ $(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{n}) = 0$ ist, muß auch $(\mathfrak{x}, \mathfrak{n}) = 0$ sein. Das ergibt aber zusammen mit (23) die Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{t}$, d. h. daß $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{M}$ angehört. Somit ist $\mathfrak{M}$ abgeschlossen; damit ist die erste Behauptung des Satzes 14 bewiesen.

Es sei andererseits $\mathfrak{R}$ die Menge aller Zahlenfolgen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ von der Eigenschaft, daß von einer gewissen Stelle angefangen $x_k = \frac{\lambda}{k}$ (λ fest) ist; ist außerdem $(y_1, y_2, \ldots) = \mathfrak{y}$, dann sei

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3, \ldots) \tag{24}$$

$$a\mathfrak{x} = (ax_1,\ ax_2,\ ax_3, \ldots) \tag{25}$$

und

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k. \tag{26}$$

In dieser Menge, die mit den Definitionen (24), (25) und (26) offenbar ein komplexer euklidischer Raum ist, sei $\mathfrak{M}$ die lineare Mannigfaltigkeit derjenigen Elemente $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, für welche $x_2 = x_4 = x_6 = \ldots = 0$ ist. (Für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ müssen also insbesondere von einer gewissen Stelle angefangen alle $x_n = 0$ sein.) Diese lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ist offenbar in $\mathfrak{R}$ abgeschlossen; sie ist aber nicht regulär, weil das Element $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ von $\mathfrak{R}$ nicht in der Form (23) dargestellt werden kann.

Satz 15. *Für die Regularität einer linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ ist hinreichend, aber nicht notwendig, daß $\mathfrak{M}$ vollständig sei.*

Beweis. Es werde zunächst angenommen, daß $\mathfrak{M}$ vollständig sei. Dann sei $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$. Ist nun $\mathfrak{y}$ ein in $\mathfrak{M}$ veränderliches Element, dann stellt $(\mathfrak{y}, \mathfrak{r})$ ein beschränktes lineares Funktional in $\mathfrak{M}$ dar. Weil aber $\mathfrak{M}$ ein vollständiger komplexer euklidischer Raum ist, gibt es nach Satz 11 ein Element $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{M}$, so daß für $\mathfrak{y} \in \mathfrak{M}$

$$(\mathfrak{y}, \mathfrak{r}) = (\mathfrak{y}, \mathfrak{t}) \tag{22a}$$

ist. Die Gleichung (22a) sagt aber aus, daß das durch die Gleichung

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{t} + \mathfrak{n} \tag{23}$$

definierte Element $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{R}$ zu allen Elementen $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist. Damit ist die Regularität von $\mathfrak{M}$ bewiesen.

Es sei andererseits $\mathfrak{R}$ die Menge aller Zahlenfolgen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ von der Eigenschaft, daß von einer gewissen Stelle angefangen $x_n = 0$ ist; ist $(y_1, y_2, \ldots) = \mathfrak{y}$, dann seien die Elemente $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ und $a\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ und die Zahl $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ wieder durch die Gleichungen (24), (25) und (26) erklärt. In dem so definierten komplexen euklidischen Raume sei wieder $\mathfrak{M}$ die Menge aller Elemente $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ mit $x_2 = x_4 = x_6 = \ldots = 0$. Dann ist $\mathfrak{M}$ zwar regulär, aber nicht vollständig.

Es gilt also für lineare Mannigfaltigkeiten komplexer euklidischer Räume $\mathfrak{R}$ das logische Schema

Vollständigkeit $\longrightarrow$ Regularität $\longrightarrow$ Abgeschlossenheit.

Wenn $\mathfrak{R}$ vollständig ist, sind alle drei Eigenschaften miteinander äquivalent.

Sämtliche Ausführungen des § 1 gelten natürlich auch speziell für komplexe euklidische Räume. Man beachte aber, daß in diesem Paragraphen weder vom Satz 3 noch von einem derjenigen Sätze Gebrauch gemacht wurde, welche in § 1 aus dem Satze 3 hergeleitet wurden; denn man kann ja in diesem Paragraphen die Worte „abgeschlossen" und „vollständig", wo sie bisher vorgekommen sind, überall durch die Worte „starkabgeschlossen" und „starkvollständig" ersetzen. Zum allgemeinen Beweise des Satzes 3 für reelle lineare metrische Räume muß bekanntlich der Wohlordnungssatz herangezogen werden. Aus den bisherigen Ausführungen dieses Paragraphen ergibt sich aber für den Fall eines komplexen euklidischen Raumes ein Beweis des Satzes 3, der ohne Benützung des Wohlordnungssatzes auskommt.

Es sei also $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge eines komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{r}_0$ ein Element von $\mathfrak{R}$, welches nicht der starkabgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ angehört. Dann gehört $\mathfrak{r}_0$ — als Element der kleinsten starkvollständigen Erweiterung $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{R}$ betrachtet — auch nicht der (in $\mathfrak{R}^*$ existierenden) starkvollständigen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ an. Nach Satz 15 gibt es nun zwei Elemente $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{R}^*$ von der Eigenschaft, daß

$$\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{t} + \mathfrak{n}$$

ist, $\mathfrak{t}$ der starkvollständigen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ angehört und $\mathfrak{n}$ zu allen Elementen der starkvollständigen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist. Dabei muß also $\mathfrak{n} \neq 0$ und daher auch $(\mathfrak{r}_0, \mathfrak{n}) = |\mathfrak{n}|^2 \neq 0$ sein. Ist daher $\mathfrak{x}$ ein veränderliches Element von $\mathfrak{R}$, dann stellt der Ausdruck $(\mathfrak{x}, \mathfrak{n})$ ein lineares Funktional in $\mathfrak{R}$ dar, welches den Forderungen des Satzes 3 genügt.

In den eben vorangegangenen Ausführungen ist auch folgender Satz enthalten:

Satz 16. *Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$, deren abgeschlossene lineare Hülle nicht mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt, dann gibt es stets mindestens ein vom Nullelement verschiedenes Element von $\mathfrak{R}$, welches zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist.*

Für unvollständige komplexe euklidische Räume muß dieser Satz nicht gelten. Es sei $\mathfrak{R}$ der komplexe euklidische Raum, welcher im zweiten Teile des Beweises des Satzes 15 betrachtet wurde, und $\mathfrak{M}$ die Menge aller Elemente $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ von $\mathfrak{R}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} = 0$. Dann ist $\mathfrak{M}$ eine in $\mathfrak{R}$ abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit, die nicht mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt. Trotzdem gibt es kein vom Nullelement verschiedenes Element von $\mathfrak{R}$, welches zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist.

Dagegen gilt die Umkehrung des Satzes 16:

„Gibt es zu einer Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ ein vom Nullelement verschiedenes Element $\mathfrak{r}_0$ von $\mathfrak{R}$,

welches zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist, dann fällt die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ nicht mit $\mathfrak{R}$ zusammen."
für beliebige (vollständige oder nicht vollständige) komplexe euklidische Räume. Unter den hier gemachten Voraussetzungen kann nämlich offenbar das Element $\mathfrak{r}_0$ selbst der abgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ nicht angehören.

Wir haben in § 1 ein Beispiel für die Möglichkeit angegeben, daß eine schwache Fundamentalfolge eines vollständigen komplexen linearen metrischen Raumes nicht schwach konvergiert. Ein solcher Fall kann in einem vollständigen komplexen *euklidischen* Raume nicht eintreten, sondern es gilt der

Satz 17. *In einem vollständigen komplexen euklidischen Raume ist jede schwache Fundamentalfolge schwach konvergent.*

Jeder vollständige komplexe euklidische Raum ist also auch im Sinne von Mazur 4 schwachvollständig.

Beweis. Es sei $\mathfrak{r}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ eine schwache Fundamentalfolge des vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$. Nach Definition 7 existiert also für beliebiges $\mathfrak{y} \in \mathfrak{R}$ $\lim\limits_{n \to \infty} (\mathfrak{r}_n, \mathfrak{y})$. Dasselbe gilt daher auch von $\lim\limits_{n \to \infty} (\mathfrak{y}, \mathfrak{r}_n)$. Der letztere Ausdruck ist aber ein lineares Funktional in $\mathfrak{y}$, welches wegen der Beschränktheit der Folge $\mathfrak{r}_n$ selbst beschränkt ist. Also gibt es nach Satz 11 ein Element $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$ von der Beschaffenheit, daß für alle $\mathfrak{y}$

$$\lim_{n \to \infty} (\mathfrak{y}, \mathfrak{r}_n) = (\mathfrak{y}, \mathfrak{r})$$

oder

$$\lim_{n \to \infty} (\mathfrak{r}_n, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{r}, \mathfrak{y}) \tag{27}$$

ist. Aus (27) folgt aber wegen der Sätze 11 und 2 die Gleichung

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \mathfrak{r}_n = \mathfrak{r}. \tag{13}$$

Damit ist Satz 17 bewiesen.

Aus Satz 17 folgt der allgemeinere

Satz 18. *Ist eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines* (vollständigen oder nicht vollständigen) *komplexen euklidischen Raumes schwachvollständig, dann gibt es zu jeder schwachen Fundamentalfolge $\mathfrak{r}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von $\mathfrak{M}$ ein Element $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{M}$ mit*

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \mathfrak{r}_n = \mathfrak{r}. \tag{13}$$

Der Beweis dieses Satzes, der ein Gegenstück zur Definition 4

darstellt, ergibt sich unmittelbar aus Definition 6 und aus Satz 17. Aus Satz 17 folgt ferner, daß *man einen komplexen euklidischen Raum, in dem nicht jede schwache Fundamentalfolge schwach konvergiert, zu einem komplexen euklidischen Raume erweitern kann, in dem jede schwache Fundamentalfolge schwach konvergiert.* (Vergleiche dagegen Satz 7!)

Satz 19. *Dafür, daß eine Folge $\mathfrak{r}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von Elementen eines komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ eine schwache Fundamentalfolge sei, ist notwendig und hinreichend, daß erstens die Grenzwerte $\lim\limits_{n \to \infty} (\mathfrak{r}_n, \mathfrak{r}_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ alle existieren und zweitens die Folge der Zahlen $|\mathfrak{r}_n|$ beschränkt sei.*

Daß die beiden hier angeführten Bedingungen für die Eigenschaft der Folge $\mathfrak{r}_n$, schwache Fundamentalfolge zu sein, notwendig sind, ist fast unmittelbar klar. Beim Beweise, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{R}$ vollständig ist; es ist nämlich offenbar die Folge $\mathfrak{r}_n$ dann und nur dann in $\mathfrak{R}$ schwache Fundamentalfolge, wenn sie in der kleinsten vollständigen Erweiterung von $\mathfrak{R}$ schwache Fundamentalfolge ist. Wir wollen also annehmen, es sei $\mathfrak{R}$ vollständig. Nun folgt aus der Existenz der Grenzwerte $\lim\limits_{n \to \infty} (\mathfrak{r}_n, \mathfrak{r}_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, daß auch $\lim\limits_{n \to \infty} (\mathfrak{r}_n, \mathfrak{y})$ stets existiert, wenn $\mathfrak{y}$ der linearen Hülle der Elemente $\mathfrak{r}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ angehört. Es sei jetzt $\mathfrak{y}$ ein Element der *abgeschlossenen* linearen Hülle der Elemente $\mathfrak{r}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ und g eine positive obere Schranke für die absoluten Beträge dieser Elemente. Dann kann man für jede positive Zahl ε ein Element $\mathfrak{y}^*$ der einfachen linearen Hülle der Elemente $\mathfrak{r}_k$ finden, so daß

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}^*| < \frac{\varepsilon}{4g}$$

ist. Sind andererseits die natürlichen Zahlen m und n größer als eine geeignet gewählte Zahl, dann ist wegen der bereits festgestellten Konvergenz von $(\mathfrak{r}_n, \mathfrak{y}^*)$ für $n \to \infty$

$$|(\mathfrak{r}_n, \mathfrak{y}^*) - (\mathfrak{r}_m, \mathfrak{y}^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher

$$|(\mathfrak{r}_n, \mathfrak{y}) - (\mathfrak{r}_m, \mathfrak{y})| = |[(\mathfrak{r}_n, \mathfrak{y}^*) - (\mathfrak{r}_m, \mathfrak{y}^*)] + (\mathfrak{r}_n - \mathfrak{r}_m, \mathfrak{y} - \mathfrak{y}^*)| \leq$$
$$\leq |(\mathfrak{r}_n, \mathfrak{y}^*) - (\mathfrak{r}_m, \mathfrak{y}^*)| + (|\mathfrak{r}_n| + |\mathfrak{r}_m|)\,|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}^*| < \frac{\varepsilon}{2} + 2g\,\frac{\varepsilon}{4g} = \varepsilon.$$

Also existiert $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{r}_n, \mathfrak{y})$ auch stets, wenn $\mathfrak{y}$ der abgeschlossenen linearen Hülle der Elemente $\mathfrak{r}_k$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ angehört. Ist endlich $\mathfrak{y}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$, dann gibt es wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ und nach Satz 15 zwei Elemente $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{R}$, so daß die Gleichung

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{t} + \mathfrak{n}$$

besteht, $\mathfrak{t}$ der genannten abgeschlossenen linearen Hülle angehört und $\mathfrak{n}$ zu allen ihren Elementen orthogonal ist. Dann ist aber für $n=1, 2, 3, \ldots$

$$(\mathfrak{r}_n, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{r}_n, \mathfrak{t}).$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, daß $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{r}_n, \mathfrak{y})$ für beliebiges $\mathfrak{y}\in\mathfrak{R}$ existiert. Zusammen mit Satz 11 bedeutet das die Richtigkeit der Behauptung, daß die Folge $\mathfrak{r}_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ eine schwache Fundamentalfolge ist.

Satz 20. *Sind* $\mathfrak{r}_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ *und* $\mathfrak{r}$ *Elemente eines komplexen euklidischen Raumes, dann ist für das Bestehen der Gleichung*

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\mathfrak{r}_n = \mathfrak{r} \tag{13}$$

notwendig und hinreichend, daß erstens die Gleichungen

$$\lim_{n\to\infty}(\mathfrak{r}_n, \mathfrak{r}_k) = (\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_k) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots) \tag{28}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}(\mathfrak{r}_n, \mathfrak{r}) = (\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) \tag{29}$$

bestehen und zweitens die Folge der Zahlen $|\mathfrak{r}_n|$ *beschränkt sei.*

Daß die angeführten Bedingungen notwendig sind, ist wieder unmittelbar klar. Beim Beweise, daß sie auch hinreichend sind, kann man sich wieder auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{R}$ vollständig ist. Dann folgt aus den Gleichungen (28), aus der Beschränktheit der Folge $|\mathfrak{r}_n|$ und aus den Sätzen 19 und 17, daß diese Folge $\mathfrak{r}_n$ jedenfalls schwach konvergiert. Es werde $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty}\mathfrak{r}_n = \mathfrak{r}^*$ gesetzt. Dann folgt aus (28) $(\mathfrak{r}^* - \mathfrak{r}, \mathfrak{r}_k) = 0$ und daher durch nochmaligen Grenzübergang

$$(\mathfrak{r}^* - \mathfrak{r}, \mathfrak{r}^*) = 0.$$

Andererseits folgt aus (29)

$$(\mathfrak{r}^* - \mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = 0.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen erhält man die zu beweisende Gleichung $\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}$.

Satz 21. *Jede beschränkte unendliche Menge* $\mathfrak{M}$ *eines komplexen euklidischen Raumes enthält mindestens eine schwache Fundamentalfolge.*

Beweis. Man greife aus $\mathfrak{M}$ zunächst irgendeine Folge $\mathfrak{r}_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ heraus. Dann sind die Zahlenfolgen $(\mathfrak{r}_n, \mathfrak{r}_k)$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ alle beschränkt. Daher kann man unter Anwendung des Diagonalverfahrens (vgl. z. B. F. Riesz **8**, S. 57) aus der Folge $\mathfrak{r}_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ ein Teilfolge $\mathfrak{r}_{n_\alpha}$ $(\alpha=1, 2, 3, \ldots)$ von der Eigenschaft herausgreifen, daß die Grenzwerte $\lim\limits_{\alpha\to\infty}(\mathfrak{r}_{n_\alpha}, \mathfrak{r}_k)$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ alle existieren. Dann existieren insbesondere alle Grenzwerte $\lim\limits_{\alpha\to\infty}(\mathfrak{r}_{n_\alpha}, \mathfrak{r}_{n_\beta})$ $(\beta=1, 2, 3, \ldots)$. Da andererseits die $\mathfrak{r}_{n_\alpha}$ Elemente der *beschränkten* Menge $\mathfrak{M}$ sind, bilden sie nach Satz 19 eine schwache Fundamentalfolge. Damit ist Satz 21 bewiesen.

Mazur **4** nennt eine unendliche Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen eines (reellen) linearen metrischen Raumes *schwachkompakt,* wenn jede aus $\mathfrak{M}$ herausgegriffene Folge mindestens eine schwache Fundamentalfolge enthält. Mit dieser Benennung kann man daher Satz 21 auch so aussprechen: *in einem komplexen euklidischen Raume ist jede beschränkte unendliche Menge schwachkompakt.*

Satz 22. $f(\mathfrak{r})$ *sei eine reelle Zahl, welche Funktion des Elementes* $\mathfrak{r}$ *eines komplexen euklidischen Raumes ist, welches in einer beschränkten und in bezug auf die schwache Konvergenz perfekten Menge* $\mathfrak{M}$ *veränderlich ist. Ist dann* $f(\mathfrak{r})$ *in* $\mathfrak{M}$ *überall in bezug auf die schwache Konvergenz stetig, dann besitzt* $f(\mathfrak{r})$ *in* $\mathfrak{M}$ *eine endliche obere Grenze g und es gibt auch mindestens eine Stelle von* $\mathfrak{M}$*, an welcher* $f(\mathfrak{r})$ *den Wert g wirklich annimmt.*

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des von Hilbert **3**, S. 200 ausgesprochenen Satzes. Daß die Menge $\mathfrak{M}$ in bezug auf die schwache Konvergenz perfekt ist, soll bedeuten, daß jede schwache Fundamentalfolge von $\mathfrak{M}$ gegen ein Element von $\mathfrak{M}$ schwach konvergiert und daß andererseits jedes Element $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{M}$ Grenzelement einer schwach konvergenten Teilfolge von $\mathfrak{r}$ verschiedener Elemente von $\mathfrak{M}$ ist. Daß $f(\mathfrak{r})$ in $\mathfrak{M}$ überall in bezug auf die schwache Konvergenz stetig ist, soll bedeuten, daß aus $\mathfrak{r}_n\in\mathfrak{M}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ und $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty}\mathfrak{r}_n = \mathfrak{r}$ (nach Voraussetzung gilt also $\mathfrak{r}\in\mathfrak{M}$) stets $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathfrak{r}_n) = f(\mathfrak{r})$ folgt.

Beweis des Satzes 22. Es sei g die endliche oder unendliche obere Grenze von $f(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{M}$. Dann gibt es also eine Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ mit $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{M}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} f(\mathfrak{x}_n) = g$. Diese Folge ist beschränkt, weil die Menge $\mathfrak{M}$ beschränkt ist. Es gibt daher nach Satz 21 eine Teilfolge $\mathfrak{x}_{n_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$ dieser Folge, welche schwache Fundamentalfolge ist. Diese Teilfolge konvergiert aber nach der über $\mathfrak{M}$ gemachten Voraussetzung schwach gegen ein bestimmtes Element $\mathfrak{x}_0$ von $\mathfrak{M}$. Wegen der über $f(\mathfrak{x})$ gemachten Voraussetzung muß daher g endlich und $f(\mathfrak{x}_0) = g$ sein.

Aus Satz 21 folgt speziell (siehe Satz 17) daß *jede beschränkte unendliche Menge eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes mindestens eine schwach konvergente Teilfolge enthält.* Es gilt daher erst recht der Satz: *jede beschränkte unendliche Menge eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes besitzt mindestens eine schwache Häufungsstelle.*

Definition 11. *Ein linearer Operator B in einem komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ heiße zu dem linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ **adjungiert**, wenn für beliebige Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}$*

$$(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, B\mathfrak{y}) \tag{30}$$

ist.

Zu einem linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ kann es offenbar höchstens einen adjungierten linearen Operator geben. Diesen zu A adjungierten linearen Operator wollen wir, wenn er existiert, stets mit A^* bezeichnen. Wie man auf dieselbe Art wie im endlichdimensionalen komplexen euklidischen Raume und im komplexen Hilbertschen Raume leicht schließen kann, folgt aus der Beschränktheit von A die Beschränktheit von A^* und die Gleichung

$$|A^*| = |A|. \tag{31}$$

Definition 12. *Ein linearer Operator A in $\mathfrak{R}$ heiße **selbstadjungiert**, wenn A^* existiert und mit A identisch ist.*

Satz 23. *Ist $\mathfrak{R}$ vollständig, dann existiert zu jedem beschränkten linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ der adjungierte lineare Operator.*

Beweis. Wenn A beschränkt ist, dann ist $(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ein beschränktes lineares Funktional in $\mathfrak{x}$. Es gibt daher nach Satz 11 zu jedem $\mathfrak{y}$ genau ein Element $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{R}$, so daß für alle $\mathfrak{x}$ $(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$ ist. Dieses Element $\mathfrak{u}$ ist aber offenbar eine lineare Funktion von $\mathfrak{y}$.

Definition 13. *Ein linearer Operator E in $\mathfrak{R}$ heiße ein **Einzeloperator**, wenn er selbstadjungiert ist und der Gleichung*

$$E^2 = E \tag{32}$$

genügt.

Ist $\mathfrak{M}$ die lineare Mannigfaltigkeit aller Elemente von $\mathfrak{R}$ von der Form $E\mathfrak{y}$, dann ist $\mathfrak{M}$ regulär und in Gleichung (23) ist $\mathfrak{t} = E\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{n} = \mathfrak{x} - E\mathfrak{x}$ zu setzen. Da somit stets $|E\mathfrak{x}| \leq |\mathfrak{x}|$ ist, ist jeder Einzeloperator beschränkt. Umgekehrt gibt es zu jeder regulären linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ genau einen Einzeloperator, der mit $\mathfrak{M}$ in der hier auseinandergesetzten Beziehung steht. Sämtliche von J. v. NEUMANN 5, S. 74 bis 78 über Einzeloperatoren (dort „Projektionsoperatoren") abgeleiteten Sätze lassen sich auf beliebige komplexe euklidische Räume übertragen; gewisse dieser Sätze sind allerdings nur unter der Voraussetzung der Vollständigkeit des Raumes richtig. Ein spezieller Einzeloperator ist die Identität (der Einheitsoperator, die Einheit); diese wollen wir ebenso wie J. v. NEUMANN 5 mit 1 bezeichnen.

Definition 14. *Ein Einzeloperator $E(\lambda)$ in $\mathfrak{R}$, der von einer reellen Veränderlichen λ abhängt, heiße eine **Zerlegung der Einheit**, wenn erstens für $\lambda < \mu$ und beliebiges $\mathfrak{x}$ stets*

$$(E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \leq (E(\mu)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \tag{33}$$

ist und zweitens für beliebiges $\mathfrak{x}$

$$\lim_{\lambda \to \infty} (E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \tag{34}$$

und

$$\lim_{\lambda \to -\infty} (E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0 \tag{35}$$

ist.

Definition 15. *Ist ein Polynom $P(\lambda)$ durch die Gleichung*

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k \tag{36}$$

erklärt und A ein linearer Operator in einem komplexen linearen Raume $\mathfrak{R}$, dann soll unter $P(A)$ der lineare Operator in $\mathfrak{R}$ verstanden werden, welcher durch die Gleichung

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k \tag{37}$$

$$(A^0 = 1,\ A^k = A^{k-1}A)$$

definiert ist.

Satz 24. *Genügt ein selbstadjungierter linearer Operator A in einem komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ für beliebige $\mathfrak{x}$ vom absoluten Betrage Eins der Ungleichung*

$$a \leq (A\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \leq b \tag{38}$$

($(A\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ muß reell sein) *und genügt das Polynom $P(\lambda)$ mit reellen Koeffizienten für $a \leq \lambda \leq b$ der Ungleichung $P(\lambda) \geq 0$, dann ist für beliebiges $\mathfrak{x}$*

$$(P(A)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \geq 0.$$

Dieser Satz kann allgemein ebenso bewiesen werden, wie ihn F. Riesz **9**, S. 32 und 33 für den speziellen Fall des komplexen Hilbertschen Raumes bewiesen hat. Aus dem Umstande, daß dieser Satz für beliebige komplexe euklidische Räume gilt, ergibt sich nun ohne weiteres, daß man nach Angabe eines beschränkten selbstadjungierten linearen Operators A in einem *vollständigen* komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ jeder für $a \leq \lambda \leq b$ definierten reellen Funktion $f(\lambda)$, welche in diesem Intervalle beschränkt ist und Grenzfunktion einer monoton nicht abnehmenden Folge von Polynomen ist, auf die von F. Riesz **8** und **9** auseinandergesetzte Weise eindeutig einen selbstadjungierten linearen Operator $f(A)$ in $\mathfrak{R}$ zuordnen kann; dasselbe gilt dann auch von der Differenz zweier Funktionen der betrachteten Art.

Von nun an soll in diesem Paragraphen unter $\mathfrak{R}$ stets ein *vollständiger* komplexer euklidischer Raum verstanden werden. Es soll nun die bisherige Definition des linearen Operatores in $\mathfrak{R}$ durch folgende allgemeinere Definition ersetzt werden:

Definition 16. *Unter einem linearen Operator in $\mathfrak{R}$ verstehe man eine lineare Abbildung von einer in $\mathfrak{R}$ überall dichten linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Z}$ in dem Raum $\mathfrak{R}$.*

Die Ausdrucksweise „$\mathfrak{Z}$ ist in $\mathfrak{R}$ überall dicht" soll dasselbe bedeuten wie „die abgeschlossene lineare Hülle (es würde hier genügen zu sagen: die abgeschlossene Hülle) von $\mathfrak{Z}$ fällt mit $\mathfrak{R}$ zusammen".

Ist A ein linearer Operator in $\mathfrak{R}$ und ist die lineare Mannigfaltigkeit derjenigen $\mathfrak{y}$, für welche $(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ein *beschränktes* lineares Funktional in $\mathfrak{x}$ ist, in $\mathfrak{R}$ ebenfalls überall dicht, dann wollen wir für diese $\mathfrak{y}$ den zu A *adjungierten* linearen Operator A^* definieren und unter $A^*\mathfrak{y}$ dasjenige (nach Satz 11 existierende und eindeutig bestimmte) Element $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{R}$ verstehen, welches für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ der Gleichung

$$(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$$

genügt. Auch ein linerarer Operator A in diesem allgemeineren Sinne soll *selbstadjungiert* heißen, wenn A^* existiert und gleich A ist. — Ein linearer Operator A soll mit einem überall sinnvollen linearen Operator B *vertauschbar* heißen, wenn für jedes $\mathfrak{x}$, für welches $A\mathfrak{x}$ Sinn hat (d. h. $\mathfrak{x}$ der in Definition 16 genannten linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Z}$ angehört) auch $A(B\mathfrak{x})$ Sinn hat und gleich $B(A\mathfrak{x})$ ist.

Satz 25. (Zerlegungssatz von F. Riesz.) *Zu jedem selbstadjungierten linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ gibt es einen und nur einen Einzeloperator E_0 in $\mathfrak{R}$ von folgenden Eigenschaften:*

1. *E_0 ist mit A und mit allen mit A vertauschbaren beschränkten, überall sinnvollen Operatoren in $\mathfrak{R}$ vertauschbar.*

2. *Es ist für alle $\mathfrak{x}$, für welche $A\mathfrak{x}$ Sinn hat,*

$$(E_0 A\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \leq 0 \tag{39}$$

und

$$([1 - E_0]A\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \geq 0. \tag{40}$$

3. *Aus $A\mathfrak{x} = 0$ folgt $E_0\mathfrak{x} = 0$.*

Der Beweis dieses Satzes kann allgemein ebenso geführt werden, wie ihn F. Riesz **9**, S. 31 bis 44 für den Spezialfall des komplexen Hilbertschen Raumes geführt hat.

Satz 26. *Es sei $E(\lambda)$ eine Zerlegung der Einheit.* (Definition 14.) *Wenn das Integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$$

endlich ist, so gibt es immer genau ein $\mathfrak{x}^*$, so daß für alle $\mathfrak{y}$

$$(\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{41}$$

ist. (Das Integral rechts ist absolut konvergent.) *Wir definieren für diese $\mathfrak{x}$ eine Funktion $A\mathfrak{x}$ und zwar durch $A\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^*$* ($\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}$ sind Elemente von $\mathfrak{R}$.)

Dann ist A ein selbstadjungierter linearer Operator in $\mathfrak{R}$ und jeder selbstadjungierte lineare Operator in $\mathfrak{R}$ kann mit Hilfe einer Zerlegung der Einheit auf diese Weise erzeugt werden. Durch die Zusatzforderung, es solle stets

$$\lim_{\mu \to \lambda - 0} (E(\mu)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$$

sein, ist diese Zerlegung der Einheit auch eindeutig bestimmt.

Dieser Satz kann allgemein ebenso bewiesen werden, wie ihn J. v. NEUMANN **5** und F. RIESZ **9** für den speziellen Fall des komplexen Hilbertschen Raumes bewiesen haben. Genügt die Zerlegung der Einheit $E(\lambda)$ der zuletzt genannten Forderung, dann ist $E(\lambda)$ der nach Satz 25 bestimmte Einzeloperator E_0, welcher zu dem selbstadjungierten linearen Operator $A-\lambda.1$ gehört.

Ist $E(\lambda)$ eine Zerlegung der Einheit, dann gibt es Einzeloperatoren $G(\lambda)$, so daß stets

$$(42)\qquad (G(\lambda)\mathfrak{x},\mathfrak{x}) = \lim_{\mu\to\lambda+0}(E(\mu)\mathfrak{x},\mathfrak{x}) - \lim_{\mu\to\lambda-0}(E(\mu)\mathfrak{x},\mathfrak{x})$$

ist. Die Menge der Stellen λ, für welche $G(\lambda) \neq 0$ ist, heiße das *Punktspektrum* und die genannten Stellen λ selbst die *Punkteigenwerte* des zugehörigen selbstadjungierten linearen Operators A. Das Punktspektrum eines selbstadjungierten linearen Operators A in einem beliebigen vollständigen komplexen euklidischen Raume *muß nicht abzählbar sein.*

Definition 17. *Ein linearer Operator A in einem komplexen euklidischen Raume heiße vollstetig, wenn die Gleichung*

$$(13)\qquad \operatorname{Lim}_{n\to\infty}\mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$$

stets

$$\lim_{n\to\infty} A\mathfrak{x}_n = A\mathfrak{x}$$

nach sich zieht.

(In der Literatur kommen auch andere Definitionen der Vollstetigkeit eines linearen Operators in einem linearen metrischen Raume vor; diese sind aber im Falle eines euklidischen Raumes unserer Definition 17 äquivalent.)

Satz 27. *Ein selbstadjungierter linearer Operator A in $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann vollstetig, wenn*

1. *A kein Streckenspektrum besitzt, d. h. aus $G(\lambda)\mathfrak{x} = 0$ für alle λ $\mathfrak{x} = 0$ folgt;*

2. *die Menge der Punkteigenwerte entweder endlich ist oder zwar unendlich ist, aber nur die einzige Häufungsstelle Null besitzt* (in diesem Falle muß diese Menge daher abzählbar sein) *und*

3. *die linearen Mannigfaltigkeiten, welche zu den Einzeloperatoren $G(\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ gehören, endliche Dimensionszahlen besitzen.*

Auch dieser Satz kann allgemein ebenso bewiesen werden wie für den Hilbertschen Raum. (HILBERT **3**, S. 201 bis 203.) Aus den Sätzen **26** und **27** folgt, daß es zu einem vollstetigen selbstadjungierten linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ stets eine endliche oder unendliche Folge von Elementen e_k von $\mathfrak{R}$ und eine zugehörige Folge reeller Zahlen λ_k gibt, welche folgenden Gleichungen genügen:

$$(43)\qquad (e_k, e_l) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l, \\ 1 & \text{für } k = l, \end{cases}$$

$$(44)\qquad \lim_{k\to\infty}\lambda_k = 0 \qquad \text{(wenn eine unendliche Folge vorliegt).}$$

$$(45)\qquad A\mathfrak{x} = \sum_k \lambda_k(\mathfrak{x}, e_k)\,e_k.$$

Auch die von J. v. NEUMANN **5**, S. 115 und 116 und 6, S. 410 bis 412 ausgesprochenen Sätze über die Spektralzerlegung sogenannter *normaler* Operatoren gelten für beliebige vollständige komplexe euklidische Räume. Die in den genannten Abhandlungen geführten Beweise lassen sich nämlich fast ohne Änderung des Wortlautes auf unseren allgemeinen Fall übertragen.

§ 3. Beweis weiterer Sätze über komplexe euklidische Räume unter Anwendung des Wohlordungssatzes.

Einen vollständigen komplexen euklidischen Raum $\mathfrak{R}$ kann man auf folgende Weise definieren. Man verstehe unter den Elementen von $\mathfrak{R}$ die komplexwertigen Funktionen $\varphi(u)$, deren Argument u die Elemente irgendeiner Menge $\mathfrak{N}$ durchläuft; dabei soll jedoch $\varphi(u)$ nur für höchstens abzählbar viele solche Elemente von Null verschieden sein, und wenn u_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Elemente von $\mathfrak{N}$ von der Beschaffenheit sind, daß für $u \neq u_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $\varphi(u) = 0$ ist, dann soll außerdem die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(u_n)|^2$ konvergieren. Die Summe zweier solcher Funktionen und das Produkt einer solchen Funktion mit einer komplexen Zahl sind dann wieder von derselben Beschaffenheit. Wir wollen daher die Summe zweier Elemente von $\mathfrak{R}$ und das Produkt eines Elementes von $\mathfrak{R}$ mit einer komplexen Zahl durch die Festsetzung definieren, daß diese Operationen mit den Werten der betreffenden Funktionen $\varphi(u)$ ausgeführt werden sollen. Sind ferner $\mathfrak{x} = \{\varphi(u)\}$ und $\mathfrak{y} = \{\psi(u)\}$ zwei Elemente von $\mathfrak{R}$ und ist für $u \neq u_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $\varphi(u) = 0$ und $\psi(u) = 0$, dann soll das innere Produkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der beiden Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ durch die Gleichung

$$(46)\qquad (\mathfrak{r}, \mathfrak{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(u_n)\,\overline{\psi(u_n)}$$

definiert werden; es ist nämlich leicht einzusehen, daß die auf der rechten Seite von (46) stehende unendliche Reihe absolut konvergiert. Man kann unschwer erkennen, daß durch die vorstehenden Festsetzungen wirklich ein komplexer euklidischer Raum definiert ist. Ebenso kann man erkennen, daß dieser komplexe euklidische Raum auch vollständig ist; man muß nur beachten, daß einerseits die Vereinigungsmenge abzählbar vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist und daß andererseits der komplexe Hilbertsche Raum vollständig ist. Die Elemente von $\mathfrak{R}$ von der Eigenschaft, daß an einer einzigen Stelle u_0 $\varphi(u) = 1$ und sonst $\varphi(u) = 0$ ist, bilden ein System paarweise orthogonaler Elemente vom absoluten Betrage Eins. Ist daher die Menge $\mathfrak{N}$ weder endlich noch abzählbar, dann ist $\mathfrak{R}$ sicher weder ein endlichdimensionaler komplexer euklidischer Raum noch ein komplexer Hilbertscher Raum. — Komplexe euklidische Räume $\mathfrak{R}$, die äquivalenten Mengen $\mathfrak{N}$ entsprechen, sind offenbar isomorph. — Den Fall, daß $\mathfrak{N}$ die Menge der reellen Zahlen ist, behandelt J. v. NEUMANN **7**, S. 37 und 38.

Definition 18. *Ist $\aleph$ eine beliebige Kardinalzahl, dann soll ein vollständiger komplexer euklidischer Raum $\mathfrak{R}_\aleph$ folgendermaßen definiert werden: man setze irgendeine Menge $\mathfrak{N}$ von der Mächtigkeit $\aleph$ fest und ordne hierauf dieser Menge auf die eben beschriebene Art einen vollständigen komplexen euklidischen Raum zu. Dieser vollständige komplexe euklidische Raum soll $\mathfrak{R}_\aleph$ heißen.*

$\mathfrak{R}_\aleph$ ist speziell ein endlichdimensionaler komplexer euklidischer Raum, wenn $\aleph$ eine endliche Kardinalzahl, und der komplexe Hilbertsche Raum, wenn $\aleph$ die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen ist.

Definition 19. *Unter einem vollständigen normierten Orthogonalsystem von Elementen eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ verstehe man eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{R}$ von folgenden Eigenschaften:*

1. *es ist stets $|\mathfrak{e}| = 1$;*
2. *für $\mathfrak{e}_1 \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}_2 \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}_1 \neq \mathfrak{e}_2$ ist $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2) = 0$ und*
3. *es gibt kein vom Nullelement verschiedenes Element von $\mathfrak{R}$, welches zu allen $\mathfrak{e}$ orthogonal ist.*

In einem $\mathfrak{R}_\aleph$ bilden die bereits betrachteten Funktionen $\varphi(u)$, welche für ein Element von $\mathfrak{N}$ gleich Eins und sonst gleich Null sind, ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem.

Satz 28. *In jedem vollständigen komplexen euklidischen Raume gibt es mindestens ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem.*

Beweis. Man ordne jeder Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ als ausgezeichnetes Element ein Element $\mathfrak{r}(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ unter folgender einschränkender Bedingung zu: wenn es Elemente von $\mathfrak{M}$ gibt, welche den absoluten Betrag Eins haben und zu allen Elementen der Komplementärmenge von $\mathfrak{M}$ orthogonal sind, dann soll $\mathfrak{r}(\mathfrak{M})$ ein solches Element sein; andernfalls darf $\mathfrak{r}(\mathfrak{M})$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{M}$ sein. Es gibt dann genau eine Wohlordnung von $\mathfrak{R}$ von der Eigenschaft, daß jedes Element $\mathfrak{r}$ das ausgezeichnete Element der Komplementärmenge des durch $\mathfrak{r}$ bestimmten Abschnittes ist. Ist in dieser Wohlordnung $\mathfrak{r}_0$ das erste Element, welches nicht die Eigenschaft hat, den absoluten Betrag Eins zu besitzen und zu allen seinen Vorgängern orthogonal zu sein, dann ist der durch $\mathfrak{r}_0$ bestimmte Abschnitt offenbar ein wohlgeordnetes vollständiges normiertes Orthogonalsystem von $\mathfrak{R}$.

Satz 29. *Ein vollständiger komplexer euklidischer Raum ist die vollständige lineare Hülle jedes seiner vollständigen normierten Orthogonalsysteme.*

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Satze 16.

Satz 30. *Besitzen zwei vollständige komplexe euklidische Räume vollständige normierte Orthogonalsysteme von gleicher Mächtigkeit, dann sind sie isomorph.*

Beweis. Nach Satz 10 sind diese beiden vollständigen normierten Orthogonalsysteme isomorph, nach den Sätzen 1 und 29 daher auch die Räume selbst.

Ein Spezialfall des Satzes 30 ist der

Satz 31. *Hat ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes die Mächtigkeit $\aleph$, dann ist dieser Raum $\mathfrak{R}_\aleph$ isomorph.*

Aus der zu Satz 1 gemachten Bemerkung ergibt sich auch, wie man in diesem Falle eine unitäre Abbildung zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_\aleph$, d. h. eine eineindeutige lineare Abbildung zwischen diesen beiden Räumen, welche die absoluten Beträge ungeändert läßt, herstellen kann. Man stelle zunächst eine eineindeutige Zuordnung zwischen dem vollständigen normierten Orthogonalsystem von $\mathfrak{R}$ und der früher betrachteten Menge $\mathfrak{A}$ her. Dasjenige Element des vollständigen normierten Orthogonalsystems von $\mathfrak{R}$, welches dabei dem Element u von $\mathfrak{A}$ zugeordnet ist, möge $\mathfrak{e}(u)$ heissen. Dasjenige Element von $\mathfrak{R}_*$, dessen zugehörige Funktion $\varphi(u)$ an der Stelle $u = u_0$ gleich Eins und sonst gleich Null ist, möge $\mathfrak{f}(u_0)$ heißen. Nun ist durch die Festsetzung, daß dem Element $\mathfrak{e}(u)$ von $\mathfrak{R}$ das Element $\mathfrak{f}(u)$ von $\mathfrak{R}_*$ zugeordnet sein soll, eine unitäre Abbildung zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_*$ eindeutig bestimmt. Man hat nämlich jeder Linearkombination endlich vieler $\mathfrak{e}(u)$ die entsprechende Linearkombination der $\mathfrak{f}(u)$ zuzuordnen. Ist aber $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$, dann ist $\mathfrak{r}$ starkes Grenzelement einer Folge von Linearkombinationen endlich vieler $\mathfrak{e}(u)$; die entsprechenden Linearkombinationen der $\mathfrak{f}(u)$ bilden dann eine starke Fundamentalfolge, welche wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}_*$ gegen ein Element $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}_*$ stark konvergiert; dieses Element $\mathfrak{y}$ ist davon unabhängig, welche gegen $\mathfrak{r}$ stark konvergente Folge von Linearkombinationen endlich vieler $\mathfrak{e}(u)$ man gewählt hat: dieses Element $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}_*$ muß dem Element $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$ zugeordnet werden.

Ist $\varphi(u)$ die Funktion, durch welche das Element $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}_*$ definiert ist, und ist für $u \neq u_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $\varphi(u) = 0$, dann ist offenbar

$$\mathfrak{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(u_n)\, \mathfrak{f}(u_n), \tag{47}$$

wo das Summenzeichen im Sinne der starken Konvergenz zu verstehen ist. Daher ist diesem $\mathfrak{y}$ das Element $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$ zugeordnet, welches durch die Gleichung

$$\mathfrak{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(u_n)\, \mathfrak{e}(u_n) \tag{48}$$

gegeben ist. Andererseits hat man offenbar

$$(\mathfrak{y}, \mathfrak{f}(u)) = \varphi(u), \tag{49}$$

daher ist auch

$$(\mathfrak{r}, \mathfrak{e}(u)) = \varphi(u) \tag{50}$$

und man erhält auf Grund von (48) den

Satz 32. *Ist $\mathfrak{M}$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{r}$ ein*

beliebiges Element von $\mathfrak{R}$, dann sind von den Zahlen $(\mathfrak{r}, \mathfrak{e})$ mit $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$ höchstens abzählbar viele von Null verschieden. Ist weiter $\mathfrak{e}_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $(\mathfrak{r}, \mathfrak{e}) = 0$ für $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, dann ist

$$\mathfrak{r} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{r}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n, \tag{51}$$

wobei das Summenzeichen im Sinne der starken Konvergenz zu verstehen ist.

Diesen Satz kann man übrigens auch unabhängig von den früheren Überlegungen nur unter Benützung des Satzes 28 (und der Definition des vollständigen komplexen euklidischen Raumes) beweisen. Sind nämlich $\mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, \ldots, p)$ endlich viele Elemente von $\mathfrak{M}$, dann ist

$$\sum_{n=1}^{p} |(\mathfrak{r}, \mathfrak{e}_n)|^2 + \left| \mathfrak{r} - \sum_{n=1}^{p} (\mathfrak{r}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n \right|^2 = |\mathfrak{r}|^2 \tag{52}$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{p} |(\mathfrak{r}, \mathfrak{e}_n)|^2 \leqq |\mathfrak{r}|^2. \tag{53}$$

Aus (53) folgt, daß von den Zahlen $(\mathfrak{r}, \mathfrak{e})$ mit $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$ höchstens abzählbar viele von Null verschieden sein können. Ist weiter $\mathfrak{e}_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $(\mathfrak{r}, \mathfrak{e}) = 0$ für $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, dann ist wegen (53) die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |(\mathfrak{r}, \mathfrak{e}_n)|^2$ konvergent und es bilden daher die Elemente $\sum_{n=1}^{p} (\mathfrak{r}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ eine starke Fundamentalfolge; diese muß daher wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ stark konvergieren. Wird ihr Grenzelement mit $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{r}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n$ bezeichnet, dann ist $\mathfrak{r} - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{r}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n$ zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal; also muß

$$\mathfrak{r} - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{r}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n = 0$$

sein, d. h. die in Satz 32 behauptete Gleichung (51) besteht.

Aus diesem so unabhängig von den früheren Überlegungen bewiesenen Satze 32 ergibt sich auch ein neuer Beweis des Satzes 11. Es sei L ein beschränktes lineares Funktional in $\mathfrak{R}$ und es seien wieder $\mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, \ldots, p)$ endlich viele Elemente des vollständigen normierten Orthogonalsystems $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$. Dann ist

$$L \sum_{n=1}^{p} \overline{(L\mathfrak{e}_n)}\,\mathfrak{e}_n = \sum_{n=1}^{p} |L\mathfrak{e}_n|^2$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{p} |L\mathfrak{e}_n|^2 \leq |L| \left|\sum_{n=1}^{p} \overline{(L\mathfrak{e}_n)}\,\mathfrak{e}_n\right| = |L| \sqrt{\sum_{n=1}^{p} |L\mathfrak{e}_n|^2},$$

also

$$(54) \qquad \sum_{n=1}^{p} |L\mathfrak{e}_n|^2 \leq |L|^2.$$

Somit sind von den Zahlen $L\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$ höchstens abzählbar viele von Null verschieden; ist $\mathfrak{e}_n \in \mathfrak{M}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und für $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $L\mathfrak{e} = 0$, dann ist die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |L\mathfrak{e}_n|^2$ konvergent und daher die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{(L\mathfrak{e}_n)}\,\mathfrak{e}_n$ stark konvergent. Man setze

$$(55) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \overline{(L\mathfrak{e}_n)}\,\mathfrak{e}_n = \mathfrak{u}.$$

Ist jetzt $\mathfrak{r}$ irgendein Element von $\mathfrak{R}$, dann kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß für $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $(\mathfrak{r}, \mathfrak{e}) = 0$ und daher

$$(51) \qquad \mathfrak{r} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{r}, \mathfrak{e}_n)\,\mathfrak{e}_n$$

ist. Dann ist aber

$$L\mathfrak{r} = L \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{r}, \mathfrak{e}_n)\,\mathfrak{e}_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{r}, \mathfrak{e}_n)\,L\mathfrak{e}_n;$$

es ist aber nach (51) und (55) auch

$$(\mathfrak{r}, \mathfrak{u}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{r}, \mathfrak{e}_n)\,L\mathfrak{e}_n.$$

Also ist

$$(22) \qquad L\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}, \mathfrak{u}),$$

wie in Satz 11 behauptet wird. (Der in § 2 gegebene Beweis des Satzes 11 hat gegenüber diesem Beweise den Vorzug, daß er ohne Benützung des Wohlordnungssatzes auskommt.)

Wir haben in Satz 31 festgestellt, daß jeder vollständige komplexe euklidische Raum $\mathfrak{R}$ einem $\mathfrak{R}_{\aleph}$ isomorph ist. Ich behaupte nun, daß *jedes* $\mathfrak{R}$ *auch nur* *e i n e m* $\mathfrak{R}_{\aleph}$ *isomorph ist*. Um das zu beweisen, genügt es offenbar, folgenden Satz zu beweisen:

S a t z 33. *Zwei verschiedene vollständige normierte Orthogonalsysteme eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes* $\mathfrak{R}$ *haben stets die gleiche Mächtigkeit.*

B e w e i s. Es seien $\mathfrak{M}^{(1)}$ und $\mathfrak{M}^{(2)}$ zwei vollständige normierte Orthogonalsysteme von $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{e}^{(1)}$ ein Element von $\mathfrak{M}^{(1)}$, dann sind von den Zahlen $(\mathfrak{e}^{(1)}, \mathfrak{e}^{(2)})$ mit $\mathfrak{e}^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$ höchstens abzählbar viele von Null verschieden; ist $\mathfrak{e}_n^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und ist für $\mathfrak{e}^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$, $\mathfrak{e}^{(2)} \neq \mathfrak{e}_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $(\mathfrak{e}^{(1)}, \mathfrak{e}^{(2)}) = 0$, dann ist (vergleiche (51))

$$(56) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |(\mathfrak{e}^{(1)}, \mathfrak{e}_n^{(2)})|^2 = 1.$$

Aus (56) folgt, daß bei festem $\mathfrak{e}^{(1)} \in \mathfrak{M}^{(1)}$ von den Zahlen $(\mathfrak{e}^{(1)}, \mathfrak{e}^{(2)})$ mit $\mathfrak{e}^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$ mindestens eine von Null verschieden ist. Man kann nun in ganz entsprechender Weise schließen, daß auch bei festem $\mathfrak{e}^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$ von den Zahlen $(\mathfrak{e}^{(1)}, \mathfrak{e}^{(2)})$ mit $\mathfrak{e}^{(1)} \in \mathfrak{M}^{(1)}$ mindestens eine von Null verschieden ist. Jedes Element $\mathfrak{e}^{(2)}$ von $\mathfrak{M}^{(2)}$ kommt daher mindestens in einer der oben betrachteten Folgen $\mathfrak{e}_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, welche den Elementen $\mathfrak{e}^{(1)}$ von $\mathfrak{M}^{(1)}$ zugeordnet sind, wirklich vor. Also ist $\mathfrak{M}^{(2)}$ die Vereinigungsmenge einer mit $\mathfrak{M}^{(1)}$ äquivalenten Gesamtheit abzählbarer Mengen. Sind also $\aleph^{(1)}$ und $\aleph^{(2)}$ die Mächtigkeiten von $\mathfrak{M}^{(1)}$ und $\mathfrak{M}^{(2)}$ und ist $\aleph_0$ die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen, dann ist

$$(57) \qquad \aleph^{(2)} \leq \aleph_0 \aleph^{(1)}.$$

Man kann nun annehmen, daß die Mengen $\mathfrak{M}^{(1)}$ und $\mathfrak{M}^{(2)}$ unendlich sind, weil für den entgegengesetzten Fall Satz 33 als bekannt angesehen werden kann. Für jede *unendliche* Kardinalzahl $\aleph$ ist aber

$$(58) \qquad \aleph_0 \aleph = \aleph$$

(S. z. B. F. HAUSDORFF, *Mengenlehre*, 1. Auflage (Leipzig, 1914), S. 127 oder 2. Auflage (Leipzig, 1927), S. 71.) Also folgt aus der Ungleichung (57)

$$(59) \qquad \aleph^{(2)} \leq \aleph^{(1)}.$$

Da man ebenso die Ungleichung $\aleph^{(1)} \leq \aleph^{(2)}$ beweisen kann, ergibt sich die Gleichung

$$(60) \qquad \aleph^{(2)} = \aleph^{(1)}.$$

Damit ist Satz 33 bewiesen. Aus Satz 33 folgt insbesondere auch, daß *die komplexen euklidischen Räume* $\mathfrak{R}_{\aleph^{(1)}}$ *und* $\mathfrak{R}_{\aleph^{(2)}}$ *mit* $\aleph^{(1)} \neq \aleph^{(2)}$ *sicher nicht isomorph sind.*

Definition 20. *Ist* $\mathfrak{R}$ *ein vollständiger komplexer euklidischer Raum und* $\mathfrak{M}$ *ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem von* $\mathfrak{R}$, *dann heiße die Mächtigkeit von* $\mathfrak{M}$ *die Dimensionszahl von* $\mathfrak{R}$.

Der vollständige komplexe euklidische Raum $\mathfrak{R}_\aleph$ hat demnach die Dimensionszahl $\aleph$.

Definition 21. *Unter der Dimensionszahl eines beliebigen komplexen euklidischen Raumes verstehe man die Dimensionszahl seiner kleinsten vollständigen Erweiterung.*

Im Sinne dieser Definition 21 ist das Wort Dimensionszahl in der Überschrift dieser Arbeit zu verstehen.

Anmerkung. In analoger Weise, wie wir hier Satz 33 bewiesen haben, kann man auch beweisen, daß *je zwei Basen* $\mathfrak{B}^{(1)}$ *und* $\mathfrak{B}^{(2)}$ *eines komplexen linearen Raumes* $\mathfrak{R}$ *stets die gleiche Mächtigkeit haben.*

Unter einer *Basis* eines komplexen linearen Raumes $\mathfrak{R}$ soll dabei mit Hausdorff **2,** S. 395 eine Menge von Elementen von $\mathfrak{R}$ verstanden werden, von denen endlich viele stets linear unabhängig sind und deren lineare Hülle mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt.

In den Linearkombinationen endlich vieler Elemente von $\mathfrak{B}^{(2)}$, als welche man die Elemente von $\mathfrak{B}^{(1)}$ darstellen kann, muß nämlich jedes Element von $\mathfrak{B}^{(2)}$ mindestens einmal wirklich vorkommen; aus der gegenteiligen Annahme würde nämlich ein Widerspruch gegen die Voraussetzung folgen, daß endlich viele Elemente von $\mathfrak{B}^{(2)}$ stets linear unabhängig sind. Also ist $\mathfrak{B}^{(2)}$ die Vereinigungsmenge einer $\mathfrak{B}^{(1)}$ äquivalenten Gesamtheit endlicher Mengen. Man kann nun entsprechend weiter schließen wie beim Beweise des Satzes 33.

Literaturverzeichnis.

1. St. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Warschau, 1932).

2. F. Hausdorff, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **167** (1932), S. 294—311.

3. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 4. Mitteilung, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse*, 1906, S. 157—227.

4. S. Mazur, Über die Nullstellen linearer Operationen, *Studia Mathematica*, **2** (1930), S. 11—20.

5. J. v. Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Mathematische Annalen*, **102** (1930), S. 49—131.

6. J. v. Neumann, Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, *Mathematische Annalen*, **102** (1930), S. 370—427.

7. J. v. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin, 1932).

8. F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913).

9. F. Riesz, Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *diese Acta*, **5** (1930), S. 23—54.

10. E. Schmidt, Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **25** (1908), S. 53—77.

(Eingegangen am 24. Februar 1934.)

Annals of Mathematics
Vol. 42, No. 5, December, 1941

3

INTRINSIC TOPOLOGY AND COMPLETION OF BOOLEAN RINGS

By Henry Löwig

(Received October 29, 1940)

Notation

If $\mathfrak{B}$ is a subclass of a lattice A we denote the meet (cross-cut, intersection, product) of the elements of $\mathfrak{B}$ with respect to A, i. e. the maximal element of A, contained in all elements of $\mathfrak{B}$, its existence supposed, by $\prod^{(A)}_{x \in \mathfrak{B}} x$, and the join (union, conjunction, lattice-sum) of the elements of $\mathfrak{B}$ with respect to A, i.e. the minimal element of A, containing all elements of $\mathfrak{B}$, its existence supposed, by $\sum^{(A)}_{x \in \mathfrak{B}} x$. If $\mathfrak{B}$ consists only of two elements, a and b, we write also $a \wedge_A b$ instead of $\prod^{(A)}_{x \in \mathfrak{B}} x$ and $a \vee_A b$ instead of $\sum^{(A)}_{x \in \mathfrak{B}} x$. If A is especially a Boolean ring we denote the ring-sum (the symmetric difference) of two elements a and b with respect to A by $a \triangle_A b$. We omit the superscripts of the signs $\prod^{(A)}$ and $\sum^{(A)}$, and the subscript of the sign $\vee_A$ if there is no doubt to which lattice or Boolean ring they refer. Under the same condition we write $a \cdot b$ or ab instead of $a \wedge_A b$, and $a + b$ instead of $a \triangle_A b$. We call a subclass $\mathfrak{B}$ of a lattice A *bounded* if there exists at least one couple a, b of elements of A such that

$$a \leq x \leq b$$

for all elements x of $\mathfrak{B}$. The expressions of "σ-lattice" and "complete lattice" are used in the same sense as in the paper (VIII). (See especially (VIII), p. 795, 4th passage.) We call a Boolean ring complete if it is a complete lattice, and a Boolean σ-ring if it is a σ-lattice. If a subring (an ideal) of a Boolean ring is a σ-lattice we call it a σ-subring (a σ-ideal). The expression of "dual ideal" is used in the same sense as in (VI). The words "A Boolean ring A is given, and the small Latin letters . . . denote elements of A" will be frequently suppressed. If we consider a sequence of elements a_n of a lattice we shall mostly suppress the supposition that the index n runs through all natural numbers. Otherwise we shall use the terminology and denotation of M. H. Stone's paper (V). The results of this paper will be used without any further reference.

1. Introduction

A sequential topology of a lattice can be defined in the following way:

If a sequence of elements a_n of a lattice has the property that all products $\prod_{k=n}^{\infty} a_k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, all joins $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, the join $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} a_k$, and the product $\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ exist, and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} a_k = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = a,$$

3

the sequence a_n is said to converge towards a or to have the limit a. (See for instance (II), p. 453.)

The lattices considered in L. V. Kantorovitch's paper (VII) have even the property that $\prod_{k=n}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} a_k$, and $\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ exist whenever the sequence a_n is bounded. Thus Kantorovitch may say a sequence a_n to converge if it is bounded, and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} a_k = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k .$$

In this paper the above convergence-definition will be considerably generalized for the case that the given lattice is a *Boolean ring*. We shall define the convergence of a sequence of elements a_n of a Boolean ring without supposing that $\prod_{k=n}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} a_k$, and $\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ exist; we shall not even suppose that the sequence a_n is bounded.

The formulation of the convergence-definition will be the topic of §2 of this paper. In §3 we shall show that in the case that $\prod_{k=n}^{\infty} a_k$ and $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ exist, our convergence-definition coincides with the definition given in the introduction. In §4 we shall introduce the important notion of an *invariant* subring $\mathfrak{a}$ of a given Boolean ring A. We shall call $\mathfrak{a}$ an invariant subring of A, or A an invariant extension of $\mathfrak{a}$, if every infinite join of elements of $\mathfrak{a}$, whenever it exists with respect to $\mathfrak{a}$, exists also with respect to A, and has the same value. In §5 we shall define the notion of a *join-extension* A of a Boolean ring $\mathfrak{a}$. A will be said to be a join-extension of $\mathfrak{a}$ if every element of A is a join of elements of $\mathfrak{a}$ with respect to A. We shall see that any join-extension is an invariant extension. The notions of "invariant extension" and "join-extension" will play an important rôle in the following paragraphs. In §6 we shall show that the finite fundamental operations of a Boolean ring are continuous under the introduced sequential topology; moreover we shall deduce a number of other relations. In §7 we shall say a few words about the closure-topology determined by the introduced sequential topology. In §8 we shall state how far the theorems on simple sequences in a Boolean ring obtained hitherto can be extended to double sequences. In §9 we shall, following D. van Dantzig's paper (I), define the notion of a fundamental sequence of elements of a Boolean ring, and explore how far D. van Dantzig's results can be applied to our case. In §10 we shall show that the sequential topology determined by the closure-topology mentioned in §7 is in general not identical with the original sequential topology. I have no further entered into the examination of this derivative sequential topology, but leave it to further investigations.

It is very probable that the theory developed in this paper can be easily extended to the lattices which Fritz Klein in his paper (IV) calls "Boole-Schrödersche Verbände." I shall deal with this matter in a later paper.

The extension of this theory to arbitrary lattices might be more complicated. It is for instance not true that the finite fundamental operations of an arbitrary lattice are continuous with respect to the sequential topology defined in this introduction. Let a partially ordered set A consist of an enumerated sequence of elements a_n, of another such sequence b_n, and of a further element e, between which there are defined the following ordering relations:

$$a_m < a_n, \qquad b_m < b_n \qquad \text{for } m < n;$$

$$a_m < b_n \qquad \text{for } m \leqq n;$$

$$a_m < e, \qquad b_m < e.$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \cdots.)$$

Then A is obviously a complete distributive lattice. ADDED IN PROOF: A is isomorphic with Mac Neille's lattice [4.7, 4.12, 4.7]. See H. M. Mac Neille, *Partially ordered sets*, Trans. Am. Math. Soc., vol. 42 (1937), pp. 416–460, especially Theorem 4.15. If $m > n$, then

$$a_m b_n = a_n,$$

$$a_m \vee b_n = b_m.$$

Obviously we have, by the convergence-definition given in this introduction

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e;$$

on the other hand we have for $n = 1, 2, 3, \cdots$

$$a_n b_1 = a_1,$$

whence

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_1 = a_1,$$

while

$$eb_1 = b_1.$$

2. The Sequential Topology $\tau(A)$

DEFINITION 1. *By a subelement of a sequence of elements a_n of a Boolean ring A, we mean an element u of A of the property that, if we suitably choose the natural number k, we have for $n \geqq k$*

$$u < a_n.$$

It is clear that the property of an element u of A to be a subelement of the sequence a_n is preserved if we replace a finite number of its terms by other elements, if we add or omit a finite number of terms, or if we change the succession of the terms (not necessarily only of a finite number). The same holds for the concepts of superelement, interelement, lower limit. upper limit, and limit, which we shall define more fully below.

Any sequence of elements of a Boolean ring has at least one subelement, namely the zero-element.

THEOREM 1. *The subelements of a sequence of elements a_n of a Boolean ring A constitute an ideal in A.*

THEOREM 2. *If u is a subelement of a sequence a_n, and b is an arbitrary element, then ub is a subelement of the sequence $a_n b$, and to every subelement u^* of the sequence $a_n b$ there exists a subelement u of the sequence a_n such that $u^* = ub$.*

DEFINITION 2. *By a superelement of a sequence a_n, we mean an element o of the property that, if we suitably choose the natural number k, we have for $n \geqq k$*

$$o > a_n.$$

It is clear that a sequence of elements of a Boolean ring A is bounded in A if and only if it has at least one superelement in A. If A has a unit every sequence of elements of A is bounded.

THEOREM 3. *The superelements of a bounded sequence of elements of a Boolean ring A constitute a dual ideal in A.* (This dual ideal is a Boole-Schröder lattice in the sense of the paper (IV).)

THEOREM 4. *If o is a superelement of a bounded sequence a_n, and b an arbitrary element, then $o \vee b$ is a superelement of the sequence $a_n \vee b$, and to every superelement o^* of the sequence $a_n \vee b$ there exists a superelement o of the sequence a_n such that $o^* = o \vee b$.*

DEFINITION 3. *Let a_n be a bounded sequence of elements of a Boolean ring A, and also a an element of A. In this case we call a an interelement of the sequence a_n with respect to A, if*

$$u < a < o$$

whenever u and o are elements of A, and u is a subelement, and o a superelement of the sequence a_n.

DEFINITION 4. *Let a_n be an unbounded sequence of elements of a Boolean ring A, and also a an element of A. In this case we call a an interelement of the sequence a_n with respect to A if ab is, according to Definition 3, an interelement of the bounded sequence $a_n b$ with respect to A for every element b of A.*

Instead of saying "a is an interelement of the sequence a_n with respect to A" we may say more simply "a is an interelement of the sequence a_n" if there is no doubt to which Boolean ring the term "interelement" is referred.

THEOREM 5. *If a_n and a are elements of a Boolean ring A, then a is an interelement of the sequence a_n with respect to A if and only if ab is an interelement of the sequence $a_n b$ with respect to A for every element b of A.*

PROOF. As for the case of an unbounded sequence Theorem 5 is involved by Definition 4, we can restrict ourselves to the case that the sequence a_n is bounded.

Let us suppose first that a is an interelement of the bounded sequence a_n, and that a further element b is given. Then Theorem 2 involves that

$$(1) \qquad u^* < ab$$

whenever u^* is a subelement of the sequence $a_n b$. If on the other side o^* is a superelement of the sequence $a_n b$, and o a superelement of the given sequence a_n, we have for $n \geqq k$, if k is an appropriate natural number,

$$o^* \vee (o + ob) > a_n b \vee (a_n + a_n b) = a_n ,$$

hence, according to the supposed property of a,

$$o^* \vee (o + ob) > a$$

and

(2) $$o^* > ab.$$

(1) and (2) involve that ab is an interelement of the sequence $a_n b$.

Now let us suppose conversely that ab is an interelement of the sequence $a_n b$ for every element b. From this supposition it yields especially that $a(a \vee c)$ is an interelement of the sequence $a_n(a \vee c)$ whenever c is an upper bound of the sequence a_n. Thus we obtain immediately that a is an interelement of the sequence a_n as we want to prove.

THEOREM 6. *If a_n and a are elements of a Boolean ring A, then a is an interelement of the sequence a_n with respect to A if and only if $a \vee b$ is an interelement of the sequence $a_n \vee b$ with respect to A for every element b of A.*

PROOF. If $a \vee b$ is an interelement of the sequence $a_n \vee b$ for every element b then a is an interelement of the sequence a_n since we may put especially $b = 0$. Now let us suppose conversely that a is an interelement of the sequence a_n, and b an arbitrary element. Let us further suppose that the sequence a_n is *bounded*. In this case the sequence $a_n \vee b$ is bounded too. Let u^* be a subelement, and o^* a superelement of this sequence. Then $u^* + u^*b$ is a subelement of the sequence $a_n + a_n b$, thus also a subelement of the sequence a_n. According to the supposed property of the element a we have

$$u^* + u^*b < a,$$

whence

(3) $$u^* < a \vee b.$$

On the other side Theorem 4 involves the inequality

(4) $$o^* > a \vee b.$$

From (3) and (4) it follows that $a \vee b$ is an interelement of the sequence $a_n \vee b$.

If the sequence a_n is not bounded we observe that ac is, by Definition 4, an interelement of the bounded sequence $a_n c$ for every element c. Hence, according to what we have just proved, $ac \vee bc = (a \vee b)c$ is an interelement of the sequence $a_n c \vee bc = (a_n \vee b)c$. Thus we obtain again the result that $a \vee b$ is an interelement of the sequence $a_n \vee b$.

THEOREM 7. *The interelements of a sequence of elements a_n of a Boolean ring*

A constitute a dense sublattice of A. (This sublattice is a Boole-Schröder lattice in the sense of the paper (IV).)

THEOREM 8. *If u is a subelement, and a an interelement of the same sequence a_n, then $u < a$.*

THEOREM 9. *If a is an interelement of a sequence a_n, and*

$$u < a^* < a$$

whenever u is a subelement of the same sequence, then a^* is as well an interelement of this sequence.

Theorems 7, 8, and 9 follow easily from Theorem 2 and from Definitions 3 and 4. (Notice that $a^{(1)}b < a^{(2)}b$ for every b implies $a^{(1)} < a^{(2)}$.)

DEFINITION 5. *If a_n is a sequence of elements of a Boolean ring A, and the lattice of the interelements of the sequence a_n with respect to A has a zero, this zero is called the lower limit of the sequence a_n with respect to A and denoted by ${}^{(A)}\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$.*

The expression "lower limit of the sequence a_n with respect to A" may be replaced by the simpler expression "lower limit of the sequence a_n" if there is no doubt to which Boolean ring it refers. In this case the sign ${}^{(A)}\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ may be replaced by the simpler sign $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$.

If $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ exists the lattice of the interelements of the sequence a_n is a Boolean ring, and $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ is its zero-element.

LEMMA 1. *If $a > u$ whenever u is a subelement of a given sequence a_n, and $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ exists, then*

$$a > \underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n .$$

PROOF. If u is a subelement of the sequence a_n then from the hypothesis and from Theorem 8 follows that

$$a \,\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n > u.$$

This inequality implies, by Theorem 9, that $a\,\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ is an interelement of the sequence a_n. Hence we have, according to Definition 5,

$$a \,\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n > \underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$$

or equivalently

$$a > \underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$$

as we wished to prove.

DEFINITION 6. *If a_n is a sequence of elements of a Boolean ring A, and the lattice of the interelements of the sequence a_n with respect to A has a unit, this unit is called the upper limit of the sequence a_n with respect to A, and denoted by ${}^{(A)}\overline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$.*

The expression "upper limit of the sequence a_n with respect to A" may be replaced by the simpler expression "upper limit of the sequence a_n" if there is no doubt to which Boolean ring it refers. In this case the sign ${}^{(A)}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ may be replaced by the simpler sign $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

LEMMA 2. *If $a < o$ whenever o is a superelement of a given bounded sequence a_n, and $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ exists, then*

$$a < \lim_{n\to\infty} a_n .$$

PROOF. If o is a superelement of the sequence a_n then from the hypothesis follows that

$$a \vee \lim_{n\to\infty} a_n < o.$$

Hence $a \vee \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ is, by Definition 3, an interelement of the sequence a_n. On the other side we have, by Definition 6,

$$a \vee \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} a_n$$

or equivalently

$$a < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

as we wished to prove.

THEOREM 10. *If both $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ and $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ exist then*

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} a_n .$$

THEOREM 11. *If both $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ and $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ exist then a is an interelement of the sequence a_n if and only if*

$$\lim_{n\to\infty} a_n < a < \lim_{n\to\infty} a_n .$$

We need now some transfinite extensions of the known rules which the finite operations of a Boolean ring obey.

THEOREM 12. *Let $\mathfrak{B}$ be a class of elements of a Boolean ring A, and also b an element of A. If in this case $\prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$ exists then $\prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} (a \vee b)$ exists too and is equal to $(\prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a) \vee b$.*

PROOF. It is obviously sufficient to prove that

$$c < a \vee b \tag{5}$$

for every element a of $\mathfrak{B}$ implies

$$c < (\prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a) \vee b.$$

From (5) follows that

$$c + cb < a$$

for every element a of $\mathfrak{B}$. Hence

$$c + cb < \prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a,$$

and

$$c < (\prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a) \vee b$$

as we wished to prove.

In the following Theorems 13 till 17 the signs $\mathfrak{B}$ and b shall have the same significance as in Theorem 12. In the special case of Boolean σ-rings they were proved by J. von Neumann, "Lectures on continuous geometries," Princeton, 1937, Appendix, p. 7. See also H. M. Mac Neille, l.c., Theorem 7.19.

THEOREM 13. *If $\sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$ exists then $\sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} ab$ exists too and is equal to $(\sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a)b$.*

PROOF. If $c > ab$ for every element a of $\mathfrak{B}$ then

$$c \vee [\sum_{x \epsilon \mathfrak{B}} x + (\sum_{x \epsilon \mathfrak{B}} x)b] > ab \vee [\sum_{x \epsilon \mathfrak{B}} x + (\sum_{x \epsilon \mathfrak{B}} x)b] > a \text{ for } a \epsilon \mathfrak{B};$$

hence

$$c \vee [\sum_{x \epsilon \mathfrak{B}} x + (\sum_{x \epsilon \mathfrak{B}} x)b] > \sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a,$$

and

$$c > (\sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a)\, b.$$

THEOREM 14. *If $\prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$ exists then $\sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} (b + ba)$ exists too and is equal to $b + b \prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$.*

PROOF. It is clear that

$$b + b \prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a > b + bx$$

for $x \epsilon \mathfrak{B}$. If $c > b + ba$ for every element a of $\mathfrak{B}$ then

$$a > b + bc$$

for $a \epsilon \mathfrak{B}$; hence

$$\prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a > b + bc,$$

and

$$c > b + b \prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$$

THEOREM 15. *If $\sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$ exists then $\prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} (b + ba)$ exists too and is equal to $b + b \sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$.*

PROOF. If $c < b + ba$ for $a \epsilon \mathfrak{B}$ then $c < b$ and $ca = 0$ for $a \epsilon \mathfrak{B}$; thus, by Theorem 13, $c \sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a = 0$, and $c < b + b \sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$.

THEOREM 16. *If $\prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$ exists then $\prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} (a + ab)$ exists too and is equal to $\prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a + (\prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a)b$.*

PROOF. If $c < a + ab$ for $a \epsilon \mathfrak{B}$ then $c < a$ for $a \epsilon \mathfrak{B}$, thus $c < \prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$; on the other side $cb = 0$; hence

$$c < \prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a + (\prod_{a \epsilon \mathfrak{B}} a) b.$$

THEOREM 17. *If $\sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$ exists then $\sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} (a + ab)$ exists too and is equal to $\sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a + (\sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a)b$.*

PROOF. If $c > a + ab$ for $a \epsilon \mathfrak{B}$ then $c \vee b > a$ for $a \epsilon \mathfrak{B}$, thus $c \vee b > \sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$, and $c > \sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a + (\sum_{a \epsilon \mathfrak{B}} a)b$.

THEOREM 18. *If $\mathfrak{a}$ is an ideal in a Boolean ring A, then $\mathfrak{a}''$ is the class of all elements b of A such that $b = \sum^{(A)}_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$ for an appropriate subclass $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}''$ is a principal ideal if and only if $\sum^{(A)}_{a \epsilon \mathfrak{a}} a$ exists; in this case $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a}(\sum^{(A)}_{a \epsilon \mathfrak{a}} a)$.* ADDED IN PROOF: Theorem 18 is partly contained in Theorem 2.1 of M. H. Stone's paper on *Algebraic characterizations of special Boolean rings*, Fundamenta Mathematicae, vol. 29 (1937), pp. 223–303.

PROOF. From the definition of $\mathfrak{a}''$ and from Theorem 13 follows that $\mathfrak{a}''$ contains the element $\sum^{A}_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$ whenever $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{a}$, and $\sum^{A}_{a \epsilon \mathfrak{B}} a$ exists. If b is an arbitrary element of $\mathfrak{a}''$ we put $\mathfrak{B} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}(b)$. Then $b > a$ whenever a is an element of $\mathfrak{B}$. If c is an arbitrary element of A then

$$(b + bc)x \epsilon \mathfrak{B}$$

for all elements x of $\mathfrak{a}$. Hence if $c \epsilon A$ and $c > a$ for every element a of $\mathfrak{B}$ we have, for $x \epsilon \mathfrak{a}$,

$$(b + bc)x < c,$$

[illegible]

$$(b + bc)x = 0$$

[illegible]

$$b + bc \epsilon \mathfrak{a}'.$$

[illegible] have $b + bc = 0$, thus $b < c$. Hence

$$b = \sum^{(A)}_{a \epsilon \mathfrak{B}} a.$$

[illegible] the first part of the theorem. The second part is now obvious.

THEOREM 19. *$\underline{\lim}_{n \to \infty} a_n$ exists if and only if $\sum_{u \epsilon \mathfrak{U}} u$, $\mathfrak{U}$ being the class of the subelements of the sequence a_n, exists; in this case*

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} a_n = \sum_{u \epsilon \mathfrak{U}} u. \tag{6}$$

PROOF. If $\underline{\lim}_{n \to \infty} a_n$ exists, from Lemma 1 and Theorem 8 follows immediately that $\sum_{u \epsilon \mathfrak{U}} u$ exists, and the equation (6) holds. If $\sum_{u \epsilon \mathfrak{U}} u$ exists then there exists also $\sum_{u \epsilon \mathfrak{U}} ub$ for every element b. (See Theorem 13.) If we notice Theorem 2, we conclude easily that $\sum_{u \epsilon \mathfrak{U}} ub$ is an interelement of the bounded sequence $a_n b$. On the other side we have

$$\sum_{u \epsilon \mathfrak{U}} ub = (\sum_{u \epsilon \mathfrak{U}} u) b.$$

Hence $\sum_{u \epsilon \mathfrak{U}} u$ is an interelement of the sequence a_n. If a is an arbitrary interelement of this sequence, we have, by Theorem 8,

$$a > u$$

for every element u of $\mathfrak{U}$, and consequently

$$a > \sum_{u \epsilon \mathfrak{U}} u.$$

Hence $\underline{\lim}_{n \to \infty} a_n$ exists and is equal to $\sum_{u \epsilon \mathfrak{U}} u$.

THEOREM 20. *$\underline{\lim}_{n \to \infty} a_n$ exists if and only if $\mathfrak{U}''$, $\mathfrak{U}$ having the same significance as in Theorem 19, is a principal ideal $\mathfrak{a}(a)$; in this case*

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} a_n = a.$$

PROOF. See Theorems 18 and 19.

THEOREM 21. (Corollary of Theorem 20.) *If the ideal of the subelements of a sequence a_n is a principal ideal $\mathfrak{a}(a)$, then $\lim_{n \to \infty} a_n$ exists and is equal to a.*

THEOREM 22. *The upper limit of a bounded sequence a_n exists if and only if $\prod_{o \epsilon \mathfrak{O}} o$, $\mathfrak{O}$ being the class of the superelements of the sequence a_n, exists; in this case*

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} a_n = \prod_{o \epsilon \mathfrak{O}} o.$$

The proof can be left to the reader. (Notice Lemma 2.)

THEOREM 23. (Corollary of Theorem 22.) *If the dual ideal of the superelements of a bounded sequence a_n has a zero then $\overline{\lim}_{n \to \infty} a_n$ exists and is equal to this zero.*

In this case the dual ideal of the superelements of the sequence a_n is a Boolean ring, and $\overline{\lim}_{n \to \infty} a_n$ is its zero.

LEMMA 3. *If* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *exists, and b is an arbitrary element, then* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n b$ *exists too and is equal to* $b \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

PROOF. See Theorems 2, 13, and 19.

LEMMA 4. *If* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *exists, and b is an arbitrary element, then* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n b$ *exists too and is equal to* $b \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

PROOF. Let $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ be denoted by a, and let c be an interelement of the sequence $a_n b$. Further let d be an arbitrary element, and o a superelement of the sequence $a_n d$. Thus o is also a superelement of the sequence $a_n bd$, and $cd < o$. We have also $ad < o$ because ad is an interelement of the sequence $a_n d$. Hence

$$(a \vee c)d < o.$$

If on the other side u is a subelement of the sequence $a_n d$, then $ad > u$, whence

$$(a \vee c)d > u.$$

We find that $a \vee c$ is an interelement of the sequence a_n. This involves, by Definition 6, $a \vee c < a$, or equivalently $c < a$. Besides we have obviously $c < b$. Hence $c < ab$ or

$$c < b \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n.$$

Since $b \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ is itself an interelement of the sequence $a_n b$, Lemma 4 is proved.

DEFINITION 7. *If a sequence of elements* a_n *of a Boolean ring A has exactly one interelement a with respect A, we say that the sequence* a_n *converges towards a with respect to A, or a is its limit with respect to A, and write*

$$^{(A)}\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

The sentences "The sequence a_n converges towards a with respect to A" and "a is the limit of the sequence a_n with respect to A" may be replaced respectively by the shorter sentences "The sequence a_n converges towards a" and "a is the limit of the sequence a_n" if there is no doubt to which Boolean ring they refer. In this case the sign $^{(A)}\lim_{n\to\infty} a_n$ may be replaced by the simpler sign $\lim_{n\to\infty} a_n$.

DEFINITION 8. *The sequential topology in a Boolean ring A, introduced by Definition 7, shall be denoted by* $\tau(A)$.

THEOREM 24. *A sequence of elements* a_n *of a Boolean ring is convergent if and only if* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *and* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *exist and are equal to one another. In this case*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

LEMMA 5. *If* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *exists, and b is an arbitrary element, then* $\lim_{n\to\infty} a_n b$ *exists too and is equal to* $b \lim_{n\to\infty} a_n$.

PROOF. See Lemmas 3 and 4 and Theorem 24.

THEOREM 25. *If* $a_n = a$ *for every n then also*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

THEOREM 26. *A subelement (superelement) of a given sequence is also a subelement (superelement) of any partial sequence.*

THEOREM 27. *Any interelement of a partial sequence of a given sequence is also an interelement of the whole sequence.*

Theorem 26 is evident, Theorem 27 can be easily deduced from Theorem 26.

THEOREM 28. *If* a_n *is an arbitrary sequence of elements of a Boolean ring, and* n_k $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ *are natural numbers different from each other, then there hold always those of the inclusion-relations*

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, a_{n_k} > \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n,$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_{n_k} < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n,$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_{n_k} > \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n,$$

and

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, a_{n_k} < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n,$$

in which both sides exist.

PROOF. See Definitions 5 and 6 and Theorem 27.

THEOREM 29. *If* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *exists, and* n_k $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ *are natural numbers different from each other, then* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ *exists too and is equal to* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

PROOF. Let us suppose first that the sequence a_n is bounded. Then, if u is a subelement and o a superelement of this sequence, and u^* and o^* have the same meaning for the sequence a_{n_k} $(k = 1, 2, 3, \cdots)$, we have, by Theorem 26,

$$u^* < o$$

and

$$u < o^*.$$

Hence we have, by Lemmas 1 and 2,

$$u^* < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

and

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n < o^*,$$

i.e.

$$u^* < \lim_{n\to\infty} a_n < o^*.$$

We see that $\lim_{n\to\infty} a_n$ is an interelement of the sequence a_{n_k} $(k = 1, 2, 3, \cdots)$.

The same result is obtained also in the case that the sequence a_n is not bounded. For if b is an arbitrary element Lemma 5 yields that $\lim_{n\to\infty} a_n b$ exists and is equal to $b \lim_{n\to\infty} a_n$; hence $b \lim_{n\to\infty} a_n$ is, by what we have just proved, an interelement of the sequence $a_{n_k} b$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$.

$\lim_{n\to\infty} a_n$ is also the only interelement of the sequence a_{n_k} $(k = 1, 2, 3, \cdots)$; for if the sequence a_{n_k} had an interelement a different from $\lim_{n\to\infty} a_n$ then a would be, by Theorem 27, also an interelement of the original sequence a_n, contrary to the hypothesis that this sequence is convergent. By this Theorem 29 is proved.

It can occur that both $\varliminf_{n\to\infty} a_n$ and $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ exist but that there is neither a partial sequence of the sequence a_n converging towards $\varliminf_{n\to\infty} a_n$ nor such a sequence converging towards $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$. Let a and b be two elements such that neither $a < b$ nor $b < a$. Now for $n = 1, 2, 3, \cdots$ let $a_{2n-1} = a$, $a_{2n} = b$. Then we have obviously

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = ab$$

and

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = a \vee b.$$

Nevertheless there is neither a partial sequence of the given sequence converging towards ab nor such a sequence converging towards $a \vee b$.

THEOREM 30. *The union of a finite number of convergent sequences with the same limit is again a convergent sequence with the same limit.*

PROOF. Suppose that $a_n^{(1)}$ and $a_n^{(2)}$ are two convergent sequences, and that

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} a_n^{(2)} = a.$$

Suppose moreover that the sequence a_n consists of the terms of the sequences $a_n^{(1)}$ and $a_n^{(2)}$ in some succession. Then from Theorem 27 follows that a is an interelement of the sequence a_n. Now let a^* be an arbitrary interelement of this sequence, b an arbitrary element, $u^{(1)}$ and $u^{(2)}$ subelements, and $o^{(1)}$ and $o^{(2)}$ superelements of the sequences $a_n^{(1)}b$ and $a_n^{(2)}b$ respectively. Then $u^{(1)}u^{(2)}$ is a subelement, and $o^{(1)} \vee o^{(2)}$ a superelement of the sequence a_n. Since a^*b is an interelement of this sequence we have

$$u^{(1)}u^{(2)} < a^*b < o^{(1)} \vee o^{(2)}. \tag{7}$$

The sequences $a_n^{(1)}b$ and $a_n^{(2)}b$ are convergent, and

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(1)} b = \lim_{n\to\infty} a_n^{(2)} b = ab.$$

(See Lemma 5.) Hence we get from (7) by using twice Theorem 19 together with Theorem 13, and Theorem 22 together with Theorem 12

$$ab \cdot ab < a^*b < ab \vee ab$$

i.e.

$$a^*b = ab.$$

Since b is arbitrary we obtain the result $a^* = a$. This proves the theorem.

3. Connection with the Usual Convergence-Definition

The following results show that our definition specializes in the case of σ-lattices to the usual definition (cf. for example G. Birkhoff, II, p. 453).

THEOREM 31. *If $a_k > a_l$ whenever $k < l$, the sequence a_n is either convergent or has no interelement; it is convergent if and only if $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ exists; in this case we have*

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{8}$$

PROOF. If a is an interelement of the sequence a_n, we have

$$a < a_n$$

for every n because all terms of the sequence are superelements of the sequence. If $u < a_n$ for every n then u is a subelement of the sequence, and we have

$$a > u.$$

Hence $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ exists and is equal to a. Thus we see that a is the only interelement of our sequence, is to be denoted by $\lim_{n\to\infty} a_n$, and the equation (8) holds.

If conversely $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ exists then it can be easily concluded that

$$u < \prod_{k=1}^{\infty} a_k < o$$

whenever u is a subelement and o a superelement of the sequence a_n, so that $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ is an interelement of this sequence.

THEOREM 32. (Corollary of Theorem 31.) *The sequence $\prod_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ is either convergent or has no interelement; it is convergent if and only if $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ exists; in this case we have*

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

THEOREM 33. *If $a_k < a_l$ whenever $k < l$, the sequence a_n is either convergent or has no interelement; it is convergent if and only if $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ exists; in this case we have*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

If the suppositions of Theorem 33 are satisfied, and the sequence a_n has an interelement a, then we have

$$a > a_n$$

for every n because all terms of the sequence are subelements of the sequence. Hence the sequence a_n is certainly bounded. The same is also true if $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ exists. After this is settled Theorem 33 can be proved in a similar way as Theorem 31.

THEOREM 34. (Corollary of Theorem 33.) *The sequence $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) is either convergent or has no interelement; it is convergent if and only if $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ exists; in this case*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

THEOREM 35. *Any monotonic sequence of elements of a Boolean σ-ring is convergent.*

Theorem 35 follows immediately from Theorems 31 and 33.

THEOREM 36. *If for $n = 1, 2, 3, \cdots$ $\prod_{k=n}^{\infty} a_k$ exists then $\varliminf_{n\to\infty} a_n$ exists if and only if $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} a_k$ exists; in this case we have*

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=n}^{\infty} a_k .$$

PROOF. Definition 1 involves that to every subelement u of the sequence a_n there can be stated a natural number m so that

$$\prod_{k=m}^{\infty} a_k > u.$$

From this it can be easily concluded that $\sum_{u\in\mathfrak{U}} u$ exists if and only if $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} a_k$ exists, and that in this case both elements are identical. ($\mathfrak{U}$ is the ideal of the subelements of the sequence a_n.) Now Theorems 19 and 33 show that Theorem 36 is true.

THEOREM 37. *If for $n = 1, 2, 3, \cdots$ $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ exists then $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ exists if and only if $\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ exists; in this case we have*

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k .$$

Theorem 37 can be proved by the aid of Theorems 22 and 31 in a similar way as Theorem 36 by the aid of Theorems 19 and 33.

THEOREM 38. *If a_n is a sequence of elements of a Boolean σ-ring then there exist certainly both $\varliminf_{n\to\infty} a_n$ and $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$.*

PROOF. See Theorems 36 and 37.

THEOREM 39. *If a_n is a sequence of elements of a Boolean σ-ring then $\lim_{n\to\infty} a_n$ exists if and only if*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} a_k = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k .$$

In this case we have

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} a_k = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k .$$

Thus our Definition 7 coincides in the case of a Boolean σ-ring with the definition of convergence and limit given in the introduction.

LEMMA 6. *If a_n is a sequence of elements of a Boolean σ-ring with unit then*

$$\varliminf_{n\to\infty} a'_n = (\varlimsup_{n\to\infty} a_n)',$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} a'_n = (\varliminf_{n\to\infty} a_n)';$$

if moreover the sequence a_n is convergent, the sequence a'_n is convergent too, and

$$\lim_{n\to\infty} a'_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)'.$$

Lemma 6 can be easily deduced from Theorems 14, 15, 36, and 37.

LEMMA 7. *If a_n and a are elements of a Boolean σ-ring with unit, and a is an interelement of the sequence a_n, then a' is an interelement of the sequence a'_n.*

PROOF. See Theorem 11 and Lemma 6.

THEOREM 40. *If $a_n > c$ for every n then the equation*

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = c \tag{9}$$

holds if and only if for every n

$$\prod_{k=n}^{\infty} a_k = c. \tag{10}$$

PROOF. If (9) holds, and the element u is of the property that for $k \geq n$ $u < a_k$, then $u < c$ because u is a subelement of the sequence a_n. This proves (10). If (10) holds then (9) follows immediately from Theorem 36.

THEOREM 41. *If $a_n < c$ for every n then the equation*

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = c$$

holds if and only if for every n

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = c.$$

Theorem 42. *An element a is an interelement of a sequence a_n if and only if for every n*

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k a = a, \tag{11}$$

and

$$\prod_{k=n}^{\infty} (a_k \vee a) = a. \tag{12}$$

Proof. If a is an interelement of the sequence a_n then it is, by Theorems 5 and 6, also an interelement of the sequences $a_n a$ and $a_n \vee a$. On the other side it is a superelement of the sequence $a_n a$ and a subelement of the sequence $a_n \vee a$. Hence we have

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n a = a,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, (a_n \vee a) = a.$$

Now Theorems 41 and 40 involve that the equations (11) and (12) hold.

Let us suppose conversely that the equations (11) and (12) hold. Let b be an arbitrary element, and u a subelement and o a superelement of the sequence $a_n b$. Further let m be a natural number of the property that

$$u < a_k b < o$$

for $k \geqq m$. Then we have

$$ab = \sum_{k=m}^{\infty} a_k ab < ao,$$

whence

$$ab < o.$$

Similarly we have

$$a = \prod_{k=m}^{\infty} (a_k \vee a) > u \vee a,$$

whence

$$u < a.$$

Since also $u < b$ we get

$$u < ab.$$

Thus we see that ab is an interelement of the sequence $a_n b$; hence a is an interelement of the sequence a_n as we wished to prove.

Another form of Theorem 42 is

Theorem 43. ***An element a is an interelement of a sequence a_n if and only if***

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n a = a, \tag{13}$$

and

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, (a_n \vee a) = a. \tag{14}$$

Proof. See Theorems 40, 41 and 42.

The following Theorems 44 and 45 will be needed in the next paragraph.

Theorem 44. *The equation*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{15}$$

is equivalent with the couple of the equations

$$\lim_{n\to\infty} a_n a = a \tag{16}$$

and

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, (a_n \vee a) = a. \tag{14}$$

Proof. That (15) implies (14) and (16) follows from Lemma 3 and Theorem 43. If (14) and (16) hold then a is, by Theorem 43, an interelement of the sequence a_n; if b is another such interelement then, by Theorem 5 and (16), $ab = a$, i.e. $a < b$.

Theorem 45. *The equation*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{17}$$

is equivalent with the couple of the equations

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n a = a \tag{13}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \vee a) = a. \tag{18}$$

Proof. If (17) holds we have to prove, in face of Theorem 43, the equation (18) only. Let b be an arbitrary element, and o a superelement of the sequence $a_n b$. Then we have $o > ab$. If moreover c is an interelement of the sequence $a_n \vee a$ then bc is an interelement of the sequence $a_n b \vee ab$; since o is a superelement also of this sequence we have $bc < o$; thus, by Lemmas 2 and 4, $bc < ab$. Since b is arbitrary we have $c < a$. On the other side we have certainly $c > a$. Hence $c = a$. This proves (18).

If (13) and (18) hold then a is, by Theorem 43, an interelement of the sequence a_n; if b is another such interelement then, by Theorem 6 and (18), $a \vee b = a$, thus $a > b$. This proves (17).

4. Invariant subrings

If $\mathfrak{a}$ is a subring of a Boolean ring A, the restriction of the sequential topology $\tau(A)$ (Definition 8) to the subring $\mathfrak{a}$ is not necessarily identical with $\tau(\mathfrak{a})$.

Let for instance A be the Boolean algebra of all classes of natural numbers, a_n the class of all natural numbers divisible by n ($n = 1, 2, 3, \cdots$), and $\mathfrak{a}$ the subring of A generated by the elements a_n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) of A. $\mathfrak{a}$ contains the unit of A. If a is a polynomial in the elements a_k ($k = 1, 2, \cdots, m$), and M the least common multiple of the natural numbers $1, 2, 3, \cdots, m$, then a natural number l is an element of a if and only if $l + M$ is an element of a. This yields that every element of $\mathfrak{a}$ is either an infinite class or the void class.

Now the classes $\prod_{k=n}^{\infty}{}^{(A)} a_k' = \left(\sum_{k=n}^{\infty}{}^{(A)} a_k\right)'$ are finite. Hence we have

$$\prod_{k=n}^{\infty}{}^{(\mathfrak{a})} a_k' = 0$$

and

$$\sum_{k=n}^{\infty}{}^{(\mathfrak{a})} a_k = e$$

if e is the unit of A. From the last equation follows

$${}^{(\mathfrak{a})}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = e.$$

It can also easily be proved that

$${}^{(\mathfrak{a})}\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 0.$$

We see that the sequence a_n is not convergent with respect to $\mathfrak{a}$. On the other hand we have obviously

$${}^{(A)}\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Thus $\tau(\mathfrak{a})$ is not identical with the restriction of $\tau(A)$ to the subring $\mathfrak{a}$.

THEOREM 46. *If $\mathfrak{a}$ is a subring of a Boolean ring A, a_n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) and a are elements of $\mathfrak{a}$, and a is an interelement of the sequence a_n with respect to A, then a is also an interelement of the sequence a_n with respect to $\mathfrak{a}$.*

PROOF. If b is an element of $\mathfrak{a}$ then ab is, by Theorem 5, an interelement of the sequence a_nb with respect to A. From Definition 3 it can be easily concluded that ab is also an interelement of the sequence a_nb with respect to $\mathfrak{a}$. Since this holds for every element b of $\mathfrak{a}$ Theorem 46 is proved.

THEOREM 47. *If $\mathfrak{a}$ is a subring of a Boolean ring A, $\mathfrak{B}$ a subclass of $\mathfrak{a}$, and b an element of $\mathfrak{a}$, then*

$$\prod_{a\in\mathfrak{B}}{}^{(A)} a = b$$

implies

$$\prod_{a\in\mathfrak{B}}{}^{(\mathfrak{a})} = b,$$

and

$$\sum_{a\in\mathfrak{B}}{}^{(A)} a = b$$

implies

$$\sum_{a\in\mathfrak{B}}{}^{(\mathfrak{a})} a = b.$$

DEFINITION 9. *A subring $\mathfrak{a}$ of a Boolean ring A is said to be invariant in A (A an invariant extension of $\mathfrak{a}$, A invariant over $\mathfrak{a}$) if the following condition is satisfied: if $\mathfrak{B}$ is a subclass of $\mathfrak{a}$, and b an element of $\mathfrak{a}$, then*

$$\sum_{a\in\mathfrak{B}}{}^{(\mathfrak{a})} a = b$$

implies

$$\sum_{a\in\mathfrak{B}}{}^{(A)} a = b.$$

Let for instance A be the Boolean algebra of all sets of real numbers and $\mathfrak{a}$ the subclass of A defined in the following way: a is an element of $\mathfrak{a}$ if and only if it is either the empty set or the union of a finite number of sets, every one of which is either an open real interval or consists of exactly one real number. Then it is easily to be seen that $\mathfrak{a}$ is an invariant subring of A.

Let, on the other hand, $\mathfrak{b}$ be the subclass of A defined in the following way: b is an element of $\mathfrak{b}$ if and only if it is either the empty set or the union of a finite number of right-hand open (and left-hand closed) real intervals. Then $\mathfrak{b}$ is as well a subring of A, but is not invariant in A. For if $c(\mu)$ (μ a positive real number) is the set of those real numbers ν which satisfy the inequality $0 \leq \nu < \mu$ then $\prod_{\mu>0}^{(A)} c(\mu)$ is the set consisting only of the number zero while $\prod_{\mu>0}^{(\mathfrak{b})} c(\mu)$ is the empty set. (See the following Theorem 48.)

THEOREM 48. *If $\mathfrak{a}$ is an invariant subring of a Boolean ring A, $\mathfrak{B}$ a subclass of $\mathfrak{a}$, and b an element of $\mathfrak{a}$, then*

$$\prod_{a\in\mathfrak{B}}{}^{(\mathfrak{a})} a = b$$

implies

$$\prod_{a\in\mathfrak{B}}{}^{(A)} a = b.$$

PROOF. If a_0 is a fixed element of $\mathfrak{B}$, we have, by Theorem 14,

$$\sum_{a\in\mathfrak{B}}{}^{(\mathfrak{a})} (a_0 + a_0a) = a_0 + a_0 \prod_{a\in\mathfrak{B}}{}^{(\mathfrak{a})} a = a_0 + b;$$

hence, by Definition 9,

$$\sum_{a\in\mathfrak{B}}^{(A)} (a_0 + a_0 a) = a_0 + b$$

and, by Theorem 15,

$$\prod_{a\in\mathfrak{B}}^{(A)} [a_0 + a_0(a_0 + a_0 a)] = a_0 + a_0(a_0 + b)$$

i.e.

$$\prod_{a\in\mathfrak{B}}^{(A)} a = b$$

as we wished to prove.

THEOREM 49. *If $\mathfrak{a}$ is an invariant subring of a Boolean ring A, a_n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) and a are elements of $\mathfrak{a}$, and a is an interelement of the sequence a_n with respect to $\mathfrak{a}$, then a is also an interelement of the sequence a_n with respect to A.*

PROOF. See Theorem 42, Definition 9, and Theorem 48.

THEOREM 50. *If $\mathfrak{a}$ is an invariant subring of a Boolean ring A, and a_n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) and a are elements of $\mathfrak{a}$, then the equation*

$$^{(\mathfrak{a})}\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{19}$$

holds if and only if the equation

$$^{(A)}\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{20}$$

holds.

In other words: if $\mathfrak{a}$ is an invariant subring of a Boolean ring A, then the sequential topology $\tau(\mathfrak{a})$ is the restriction of the sequential topology $\tau(A)$ to the subring $\mathfrak{a}$.

PROOF. From Definition 7 and from Theorems 46 and 49 follows immediately that (20) implies (19). Let us suppose now that (19) is satisfied. Let further b be an interelement of the sequence a_n with respect to A, and $\mathfrak{U}$ the class of those subelements of this sequence which are contained in $\mathfrak{a}$. Then, by Theorem 19,

$$\sum_{u\in\mathfrak{U}}^{(\mathfrak{a})} u = a;$$

hence, we have, by Definition 9, also

$$\sum_{u\in\mathfrak{U}}^{(A)} u = a$$

and, by Theorem 8,

$$b > a.$$

If the sequence a_n is bounded with respect to $\mathfrak{a}$, we can prove in a similar way that also $b < a$; thus we know that (19) implies (20) if the sequence a_n is bounded with respect to $\mathfrak{a}$. If this condition is not satisfied, let c be an arbitrary element of $\mathfrak{a}$; we have, by Lemma 5,

$$^{(\mathfrak{a})}\lim_{n\to\infty} a_n c = ac$$

and, by what we have just proved,

$$^{(A)}\lim_{n\to\infty} a_n c = ac.$$

Hence we have

$$bc = ac$$

and

$$(b + ab)c = 0$$

for every element c of $\mathfrak{a}$. Thus we have especially

$$(b + ab)a_n = 0$$

for $n = 1, 2, 3, \cdots$. The last equation involves, by Theorem 5, the equation

$$(b + ab)b = 0$$

and consequently

$$b < a.$$

This proves the theorem also for the case that the sequence a_n is not bounded with respect to $\mathfrak{a}$.

From Theorem 50 follows that in the example given at the beginning of this paragraph the subring $\mathfrak{a}$ is not invariant in A.

THEOREM 51. *If $\mathfrak{a}$ is an invariant subring of a Boolean ring A, and a_n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) and a are elements of $\mathfrak{a}$, then the equation*

$$^{(\mathfrak{a})}\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$$

holds if and only if the equation

$$^{(A)}\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$$

holds.

PROOF. In face of Theorems 44 and 50 we have only to prove that the equation

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n \vee a) = a \tag{14}$$

holds with respect to $\mathfrak{a}$ if and only if it holds with respect to A. But this assertion is equivalent with the assertion that a is an interelement of the sequence

$a_n \vee a$ with respect to $\mathfrak{a}$ if and only if it is with respect to A; and that the latter assertion is true follows from Theorems 46 and 49.

THEOREM 52. *If $\mathfrak{a}$ is an invariant subring of a Boolean ring A, and a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ and a are elements of $\mathfrak{a}$, then the equation*

$$^{(\mathfrak{a})}\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

holds if and only if the equation

$$^{(A)}\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

holds.

PROOF. Compare the proof of Theorem 51 and see Theorems 45, 50, 46, and 49.

THEOREM 53. *If $\mathfrak{a}_2$ is an invariant subring of a Boolean ring A, and $\mathfrak{a}_1$ an invariant subring of $\mathfrak{a}_2$, then $\mathfrak{a}_1$ is also an invariant subring of A.*

THEOREM 54. *Let $\mathfrak{B}$ be a chain of subrings of a Boolean ring A such that $\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$, and $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ imply that $\mathfrak{a}$ is invariant in $\mathfrak{b}$. Then each element $\mathfrak{a}$ of $\mathfrak{B}$ is also invariant in* $\sum^{(\mathfrak{R})}_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{b}$. (That $\mathfrak{B}$ is a chain means that $\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ imply $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ or $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. $\mathfrak{R}$ is the lattice of all subrings of A.)

PROOF. Let $\mathfrak{a}$ be an element of $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ a subset of $\mathfrak{a}$, and b an element of $\mathfrak{a}$. Suppose that

$$\sum_{a \in \mathfrak{C}}^{(\mathfrak{a})} a = b.$$

If c is an element of $\sum^{(\mathfrak{R})}_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{b}$, and $c > a$ whenever $a \in \mathfrak{C}$, then c is contained in some element $\mathfrak{b}$ of $\mathfrak{B}$, and it can be supposed that $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ so that $\mathfrak{a}$ is invariant in $\mathfrak{b}$. (Notice that $\sum^{(\mathfrak{R})}_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{b}$ is the *set-theoretical* union of the subrings $\mathfrak{b}$ which are elements of $\mathfrak{B}$.) Hence $c > b$. This proves the theorem.

THEOREM 55. *If $\mathfrak{a}_1$ is an invariant subring of a Boolean ring A and $\mathfrak{a}_2$ a subring of A containing $\mathfrak{a}_1$, then $\mathfrak{a}_1$ is also invariant in $\mathfrak{a}_2$.*

PROOF. If $\mathfrak{B}$ is a subclass of $\mathfrak{a}_1$, b an element of $\mathfrak{a}_1$, and

$$\sum_{a \in \mathfrak{B}}^{(\mathfrak{a}_1)} a = b,$$

we have

$$\sum_{a \in \mathfrak{B}}^{(A)} a = b$$

because $\mathfrak{a}_1$ is invariant in A, and

$$\sum_{a \in \mathfrak{B}}^{(\mathfrak{a}_2)} a = b$$

by Theorem 47.

THEOREM 56. *Every ideal $\mathfrak{a}$ of a Boolean ring A is invariant in A.*

PROOF. Let $\mathfrak{B}$ be a subclass of $\mathfrak{a}$, b an element of $\mathfrak{a}$, and

$$\sum_{a \in \mathfrak{B}}^{(\mathfrak{a})} a = b.$$

If c is an arbitrary element of A, and $c > a$ whenever $a \in \mathfrak{B}$, we have also

$$bc > a$$

for every element a of $\mathfrak{B}$. Since bc is an element of $\mathfrak{a}$, we have

$$bc > b,$$

or equivalently

$$c > b$$

proving the theorem.

THEOREM 57. *If $\mathfrak{a}$ is an invariant subring of a Boolean ring A, and $\mathfrak{b}$ a normal ideal in A, then $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ is a normal ideal in $\mathfrak{a}$, and every normal ideal in $\mathfrak{a}$ can be obtained in this way.*

PROOF. If $\mathfrak{b}$ is a normal ideal in A, it is obvious that $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ is an ideal in $\mathfrak{a}$. If a is an element of the second orthocomplement of $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ with respect to $\mathfrak{a}$, we have, by Theorem 18,

$$a = \sum_{x \in \mathfrak{B}}^{(\mathfrak{a})} x$$

for an appropriate subclass $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Since $\mathfrak{a}$ is invariant in A, we have also

$$a = \sum_{x \in \mathfrak{B}}^{(A)} x.$$

Hence a is, again by Theorem 18, an element of $\mathfrak{b}$; since it is also an element of $\mathfrak{a}$, it is an element of $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. This proves the first part of the theorem.

If on the other side $\mathfrak{c}$ is an arbitrary normal ideal in $\mathfrak{a}$, we have obviously

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}''$$

the dashing referred to A, and $\mathfrak{c}''$ is a normal ideal in A.

5. Join-extensions

The relation between a partially ordered set and its completion by cuts (cf. H. MacNeille, "Partially ordered sets," Trans. Am. Math. Soc. 42 (1937), p. 445, line 9 from bottom) is a special case of the following definition.

DEFINITION 10. *If A is a subring of a Boolean ring R, then R is said to be a join-extension of A if to every element b of R there exists a subclass $\mathfrak{B}$ of A such that*

$$b = \sum_{a \in \mathfrak{B}}^{(R)} a.$$

If R is a join-extension of a Boolean ring A and a subring of a Boolean ring B, we shall say that R is a join-extension of A in B.

Theorem 58. *If R is a join-extension of a Boolean ring A, then every element of R is the join of those elements of A which it contains, with respect to R.*

Theorem 59. *If A and A^* are Boolean rings between which there exists an isomorphism Λ, R a join-extension of A, and R^* a join-extension of A^*, then there exists at the utmost one extension of the isomorphism Λ to an isomorphism Λ_R between R and R^*. If Λ_R exists it can be defined in the following way: let b be an element of R, $\mathfrak{a}$ the class of those elements of A which are contained in b, and $\mathfrak{a}^*$ the subclass of A^* corresponding to $\mathfrak{a}$ by virtue of Λ; then the element b^* of R^* corresponding to b by virtue of Λ_R is defined by the equation*

$$b^* = \sum_{a^* \epsilon \mathfrak{a}^*}^{(R^*)} a^*.$$

The proof of Theorems 58 and 59 can be left to the reader.

Theorem 60. (Corollary of Theorem 59.) *If R is a join-extension of a Boolean ring A, the identity is the only automorphism of R which carries every element of A into itself.*

Theorem 61. *Any join-extension of a Boolean ring A is an invariant extension of A.*

Proof. Let R be a join-extension of A, b an element of A, and $\mathfrak{B}$ a subclass of A such that

$$(21) \qquad \sum_{a \epsilon \mathfrak{B}}^{(A)} a = b.$$

Further let c be an element of R such that

$$c > a$$

for $a \epsilon \mathfrak{B}$. Then we have also

$$(22) \qquad (b + bc)a = 0$$

for $a \epsilon \mathfrak{B}$. On the other side $b + bc$ is itself an element of R. Hence we have, by Theorem 58,

$$(23) \qquad b + bc = \sum_{\substack{x < b+bc \\ x \epsilon A}}^{(R)} x.$$

From (22) and (23) follows

$$(24) \qquad xa = 0$$

for $x < b + bc$, $x \epsilon A$, $a \epsilon \mathfrak{B}$, and from (21) and (24), by Theorem 13,

$$xb = 0$$

for $x < b + bc$, $x \epsilon A$. Now we get from (23)

$$b + bc = 0,$$

thus $c > b$. This proves

$$\sum_{a \epsilon \mathfrak{B}}^{(R)} a = b.$$

Theorem 62. ***If R_1 is a join-extension of A, and R_2 a join-extension of R_1, then R_2 is a join-extension of A.***

Proof. If b is an element of R_2 we have, by hypothesis and by Theorem 58,

$$b = \sum_{\substack{a<b \\ a \epsilon R_1}}^{(R_2)} a$$

and

$$a = \sum_{\substack{x<a \\ x \epsilon A}}^{(R_1)} x$$

for $a < b$, $a \epsilon R_1$. Since R_1 is, by Theorem 61, invariant in R_2 we have also

$$a = \sum_{\substack{x<a \\ x \epsilon A}}^{(R_2)} x \quad \text{for} \quad a < b,\ a \epsilon R_1.$$

Hence

$$b = \sum_{\substack{a<b \\ a \epsilon R_1}}^{(R_2)} \sum_{\substack{x<a \\ x \epsilon A}}^{(R_2)} x.$$

This proves the theorem, according to Definition 10.

Theorem 63. (Compare Theorem 54.) *Let $\mathfrak{B}$ be a chain of subrings of a Boolean ring B such that $R_1 \epsilon \mathfrak{B}$, $R_2 \epsilon \mathfrak{B}$ and $R_1 \subset R_2$ imply that R_2 is a join-extension of R_1. Then $\sum_{R \epsilon \mathfrak{B}}^{(\mathfrak{R})} R$ is a join-extension of each element R of $\mathfrak{B}$, by $\mathfrak{R}$ denoted the lattice of all subrings of B.*

Proof. If R_0 is an arbitrary element of $\mathfrak{B}$, and b an element of $\sum_{R \epsilon \mathfrak{B}}^{(*)} R$, then b is also contained in at least one subring R of B which is an element of $\mathfrak{B}$, and it can be supposed that $R_0 \subset R$. Hence we have

$$b = \sum_{\substack{a<b \\ a \epsilon R_0}}^{(R)} a.$$

From this equation follows, by Theorem 54,

$$b = \sum_{\substack{a<b \\ a \epsilon R_0}}^{(L)} a$$

if $\sum_{R \epsilon \mathfrak{B}}^{(\mathfrak{R})} R$ is denoted by L. Hence $\sum_{R \epsilon \mathfrak{B}}^{(\mathfrak{R})} R$ is a join-extension of R_0, proving the theorem.

Theorem 64. *If R_2 is a join-extension of a Boolean ring A, and R_1 a subring of R_2 containing A, then R_1 is a join-extension of A, and R_2 is a join-extension of R_1.*

Proof. If b is an element of R_1, it is also an element of R_2. Hence we have, by Theorem 58 and by hypothesis,

$$b = \sum_{\substack{a<b \\ a \epsilon A}}^{(R_2)} a$$

and, by Theorem 47,

$$b = \sum_{\substack{a<b \\ a \epsilon A}}^{(R_1)} a.$$

This proves that R_1 is a join-extension of A.

The second part of Theorem 64 is trivial.

If A and R are subrings of a Boolean ring B, A is invariant in B, and R a join-extension of A, then R is not necessarily invariant in B. Let B be the Boolean ring of all classes of natural numbers, A the subring of B consisting of all finite classes of natural numbers different from 1, and R the subring of B consisting of the elements of A and their complements with respect to the unit-element of B. Then A is invariant in B (it is an ideal of B), R is a join-extension of A, but R is not invariant in B.

THEOREM 65. *If A, R_1, and R_2 are subrings of a Boolean ring R_3, $A \subset R_1 \subset R_2$, and R_1 is a join-extension of A, then R_2 is a join-extension of R_1.*

PROOF. See Theorem 64.

THEOREM 66. *If A is an invariant subring of a Boolean ring B, and N the class of all elements b of B such that*

$$b = \sum_{z \in \mathfrak{B}}^{(B)} z$$

for an appropriate subclass $\mathfrak{B}$ of A (so that especially all elements of A belong to N) then N is itself a subring of B; hence N is a join-extension of A in B.

PROOF. It is obvious that $b_1 \in N$ and $b_2 \in N$ imply $b_1 b_2 \in N$ and $b_1 \vee b_2 \in N$. (See Theorem 13.)

Next we shall prove that $a \in A$ and $b \in N$ imply $a + ab \in N$. We put

$$\mathfrak{a}(a)\mathfrak{a}(b)A = \mathfrak{a},$$

the signs $\mathfrak{a}(a)$ and $\mathfrak{a}(b)$ referred to the Boolean ring B. $\mathfrak{a}(a)A$ is an ideal in A and consequently, by Theorem 56, invariant in A. Since A is, by hypothesis, invariant in B, $\mathfrak{a}(a)A$ is, by Theorem 53, as well invariant in B. Hence $\mathfrak{a}(a)\mathfrak{a}(b)A$ is, by Theorem 57, a normal ideal in $\mathfrak{a}(a)A$. Now we have

$$(\mathfrak{a} \vee_{\mathfrak{J}} \mathfrak{a}')'' = \mathfrak{a}(a)A$$

if the dashes are referred to $\mathfrak{a}(a)A$, and $\mathfrak{J}$ is the distributive lattice of the ideals in $\mathfrak{a}(a)A$. Consequently we have, by Theorem 18,

$$\sum_{z \in \mathfrak{a} \vee_{\mathfrak{J}} \mathfrak{a}'}^{(\mathfrak{a}(a)A)} z = a$$

and

$$\sum_{\substack{z \in \mathfrak{a} \\ \text{or } z \in \mathfrak{a}'}}^{(\mathfrak{a}(a)A)} z = a$$

because every element of $\mathfrak{a} \vee_{\mathfrak{J}} \mathfrak{a}'$ can be decomposed into the join of an element of $\mathfrak{a}$ and an element of $\mathfrak{a}'$. Hence we have also

$$\sum_{\substack{z \in \mathfrak{a} \\ \text{or } z \in \mathfrak{a}'}}^{(B)} z = a. \tag{25}$$

Since ab is an element of N, we have

$$\sum^{(B)}$$

for an appropriate subclass $\mathfrak{B}$ of A. From this it can be easily concluded that also

$$ab = \sum_{\substack{z \in A \\ z < ab}}^{(B)} z,$$

i.e.

$$ab = \sum_{z \in \mathfrak{a}}^{(B)} z.$$

If on the other side $y \in \mathfrak{a}'$, then $y < a$ and $yz = 0$ for $z \in \mathfrak{a}$, whence $yb = 0$, and

$$y < a + ab.$$

If d is an element of B, and $d > y$ whenever $y \in \mathfrak{a}'$ then

$$d \vee ab > z$$

for $z \in \mathfrak{a}$ as well as for $z \in \mathfrak{a}'$; hence, according to (25),

$$d \vee ab > a,$$

and

$$d > a + ab.$$

This proves

$$\sum_{y \in \mathfrak{a}'}^{(B)} y = a + ab.$$

Since $\mathfrak{a}'$ is a subclass of A, $a + ab$ is an element of N, as we wished to prove.

If a and b are arbitrary elements of N, then there exists a subclass $\mathfrak{C}$ of A such that

$$\sum_{z \in \mathfrak{C}}^{(B)} z = a. \tag{26}$$

From (26) follows, by Theorem 17,

$$\sum_{z \in \mathfrak{C}}^{(B)} (z + zb) = a + ab.$$

Since $z + zb$ is, according to what we have just proved, an element of N, whenever z is an element of A, and b an element of N, we find that also $a + ab$ is an element of N. Now it is clear that also $a + b = (a + ab) \vee (ab + b)$ is an element of N, and Theorem 66 is proved.

If A is an arbitrary subring of B then the subclass N of B, defined in the same way as in Theorem 66, is certainly a *sublattice* of B, but not necessarily a *subring* of B. If, in the example given at the beginning of §4, we put for instance

$$a = a_1$$

$$b = \sum_{n=2}^{\infty}{}^{(A)} a_n,$$

then $a + ab$ is not representable as a join of elements of $\mathfrak{a}$ with respect to A.

If it is known, conversely, that N is a subring of B, and B is a complete Boolean ring, one can easily conclude that A is invariant in B. But this statement does not remain true if we omit the supposition regarding the completeness of B.

Let A be the Boolean ring whose elements are the finite sets of even positive integers and the complements of these sets with respect to the set of all positive integers, and let B consist of all finite sets of positive integers and their complements with respect to the set of all positive integers; the finite operations in A and B are meant set-theoretically. Then A is a subring of B, and N has the same property because it is identical with A, but A is not invariant in B.

Another form of Theorem 66 is

THEOREM 67. *Let A be an invariant subring of a Boolean ring B, and $\mathfrak{A}$ a subclass of A. If in this case $\prod^{(B)}_{x \in \mathfrak{A}} x$ exists then there exists also a subclass $\mathfrak{B}$ of A such that $\sum^{(B)}_{y \in \mathfrak{B}} y$ exists and is equal to $\prod^{(B)}_{x \in \mathfrak{A}} x$; and if $\sum^{(B)}_{x \in \mathfrak{A}} x$ exists, and moreover an element a of A such that $x < a$ for $x \in \mathfrak{A}$, then there exists a subclass $\mathfrak{C}$ of A such that $\prod^{(B)}_{z \in \mathfrak{C}} z$ exists and is equal to $\sum^{(B)}_{x \in \mathfrak{A}} x$.*

PROOF. If $\prod^{(B)}_{x \in \mathfrak{A}} x$ exists, and x_0 is an element of $\mathfrak{A}$, then $\sum^{(B)}_{x \in \mathfrak{A}} (x_0 + x_0 x)$ exists too and is equal to $x_0 + \prod^{(B)}_{x \in \mathfrak{A}} x$. (Theorem 14.) Consequently we have

$$\prod^{(B)}_{x \in \mathfrak{A}} x = x_0 + \sum^{(B)}_{x \in \mathfrak{A}} (x_0 + x_0 x).$$

Hence $\prod^{(B)}_{x \in \mathfrak{A}} x$ is, by Theorem 66, an element of N.

If there exist $\sum^{(B)}_{x \in \mathfrak{A}} x$ and an element a of A such that $x < a$ for $x \in \mathfrak{A}$, then there exists, by Theorem 66, a subclass $\mathfrak{C}^*$ of A such that

$$a + \sum^{(B)}_{x \in \mathfrak{A}} x = \sum^{(B)}_{z \in \mathfrak{C}^*} z;$$

hence we have, by Theorem 15,

$$\sum^{(B)}_{x \in \mathfrak{A}} x = \prod^{(B)}_{z \in \mathfrak{C}^*} (a + z).$$

THEOREM 68.[1] *The Boolean ring $\mathfrak{N}$ of the normal ideals of a Boolean ring A is a join-extension of the Boolean ring $\mathfrak{P}$ of the principal ideals of A. Hence $\mathfrak{P}$ is invariant in $\mathfrak{N}$.*

PROOF. If $\mathfrak{b}$ is a normal ideal in A, we have obviously

$$\mathfrak{b} = \sum^{(\mathfrak{N})}_{a \in \mathfrak{b}} \mathfrak{a}(a)$$

or

$$\mathfrak{b} = \sum^{(\mathfrak{N})}_{\substack{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{P}}} \mathfrak{a}.$$

[1] *Editorial comment.* Theorems 68, 69, 80, 81, and some of the other theorems of this section are either partly or wholly in H. MacNeille's "Partially ordered sets," Trans. Am. Math. Soc. 42(1937), esp. Theorem 11.13 and 11.12.

THEOREM 69. (Corollary of Theorem 68.) *Any Boolean ring can be invariantly extended to a complete Boolean ring.*

THEOREM 70. *If the signs A, B, and N have the same meaning as in Theorem 66 then N is invariant in B.*

PROOF. Let $\bar{B}$ be a complete Boolean ring which is an invariant extension of B. (That such a Boolean ring $\bar{B}$ exists follows from Theorem 69.) Then A is, by Theorem 53, an invariant subring of $\bar{B}$. Further let $\bar{N}$ be the subring of $\bar{B}$ arising from A and $\bar{B}$ in the same way as N from A and B in Theorem 66. N is a subring of $\bar{N}$. If now $\mathfrak{B}$ is a subclass of N, and b an element of N such that

$$\sum^{(N)}_{a \in \mathfrak{B}} a = b \tag{27}$$

then we put

$$\sum^{(\bar{B})}_{a \in \mathfrak{B}} a = c. \tag{28}$$

($\sum^{(\bar{B})}_{a \in \mathfrak{B}} a$ exists because $\bar{B}$ is a complete Boolean ring.) c satisfies the inequality

$$c < b$$

and is an element of $\bar{N}$. Since b is an element of $\bar{N}$, the same holds also for $b + c$. Hence we have

$$b + c = \sum^{(\bar{B})}_{x \in \mathfrak{C}} x \tag{29}$$

for an appropriate subclass $\mathfrak{C}$ of A. On the other side we get from (28)

$$(b + c)a = 0$$

for $a \in \mathfrak{B}$. Consequently we have the more

$$xa = 0$$

for $x \in \mathfrak{C}$, $a \in \mathfrak{B}$. Because $\mathfrak{C}$ is a subclass of N we get from this and from (27)

$$xb = 0$$

for $x \in \mathfrak{C}$. Now from (29) follows

$$b + c = 0$$

i.e. $c = b$. By this is proved that N is an invariant subring of $\bar{B}$. Hence N is, by Theorem 55, also invariant in B.

THEOREM 71. *If the signs A, B, and N have the same meaning as in Theorem 66, and R is a join-extension of A invariant in B* (i.e. an invariant subring of B which is a join-extension of A), *then R is contained in N.*

DEFINITION 11. *If the signs A, B, and N have the same meaning as in Theorem 66, then N is called the maximal join-extension of A invariant in B.*

Definition 11 is justified by Theorem 71.

THEOREM 72. *If A is an invariant subring of a Boolean ring B, the join-extensions of A invariant in B form a complete sublattice of the lattice of all sub-*

rings of B. The zero of this sublattice is A, and its unit is the maximal join-extension of A invariant in B.

Theorem 73. *Let A be an invariant subring of Boolean ring B, R a join-extension of A invariant in B, N the maximal join-extension of A invariant in B, and D an invariant subring of B containing N. In this case N is also the maximal join-extension of R invariant in D.*

Theorem 74. *If $\mathfrak{a}$ is an ideal of a Boolean ring A, the maximal join-extension of $\mathfrak{a}$ invariant in A is identical with $\mathfrak{a}''$.*

Proof. See Theorem 18.

If $\mathfrak{a}$ is an arbitrary invariant subring of A, the maximal join-extension of $\mathfrak{a}$ invariant in A is certainly a subring of $\mathfrak{a}''$ (and, by Theorem 35, even invariant in $\mathfrak{a}''$), but not necessarily identical with $\mathfrak{a}''$. Let for instance A be a *finite* Boolean ring, and $\mathfrak{a}$ a proper subring of A which contains the unit of A. Then $\mathfrak{a}$ is certainly invariant in A, and $\mathfrak{a}'' = A$, while the maximal join-extension of $\mathfrak{a}$ invariant in A is $\mathfrak{a}$ itself.

Theorem 75. *If A is an invariant subring of a complete Boolean ring B, the maximal join-extension N of A invariant in B is itself a complete Boolean ring, and any complete invariant subring of B containing A contains N.*

Proof. If $\mathfrak{B}$ is a subclass of N then $\sum^{(B)}_{x\in\mathfrak{B}} x$ exists and is, according to the definition of N, contained in N; hence $\sum^{(N)}_{x\in\mathfrak{B}} x$ exists and is identical with $\sum^{(B)}_{x\in\mathfrak{B}} x$. (See Theorem 47.) If we put

$$\sum^{(N)}_{x\in\mathfrak{B}} x = a$$

then $\sum^{(N)}_{x\in\mathfrak{B}} (a + x)$ exists too. Hence, by Theorem 15, there exists also $\prod^{(N)}_{x\in\mathfrak{B}} x$ and is identical with $a + \sum^{(N)}_{x\in\mathfrak{B}} (a + x)$.

If D is a complete invariant subring of B, and D contains A, then $\sum^{(D)}_{x\in\mathfrak{A}} x$ exists whenever $\mathfrak{A}$ is a subclass of A, and we have

$$\sum^{(D)}_{x\in\mathfrak{A}} x = \sum^{(B)}_{x\in\mathfrak{A}} x.$$

Thus D contains all elements of N.

Definition 12. *An extension N of a Boolean ring A is said to be a minimal complete invariant extension of A, or shorter: a completion of A, if N is a complete Boolean ring invariant over A, and there is no complete proper subring of N containing A.*

Theorem 76. *If A is an invariant subring of a complete Boolean ring B, and N the maximal join-extension of A invariant in B, then N is a minimal complete invariant extension of A.*

Proof. N is, by Theorem 75, a complete Boolean ring and, by Theorems 61 and 66, invariant over A. If R is a complete subring of N containing A then R is, by Theorems 53 and 64, invariant in B; hence we have, by Theorem 75,

$$R \supset N$$

and consequently

$$R = N.$$

Theorem 77. *A Boolean ring N is a minimal complete invariant extension of a Boolean ring A if and only if N is a complete Boolean ring and a join-extension of A.*

Proof. If N is a minimal complete invariant extension of A, from Theorem 75 and Definition 12 follows that the maximal join-extension of A invariant in N cannot be different from N; hence N is a join-extension of A.

If N is complete and a join-extension of A, we see immediately that N is the maximal join-extension of A invariant in N; hence N is, by Theorem 76, a minimal complete invariant extension of A.

Theorem 78. *If A and N are invariant subrings of a Boolean ring B, and N is a minimal complete invariant extension of A, then N is the maximal join-extension of A invariant in B.*

The proof follows easily from Theorem 77 and Definition 11.

Theorem 79. *Any Boolean ring has at least one minimal complete invariant extension.*

Proof. See Theorems 69 and 76.

Theorem 80. *The Boolean ring $\mathfrak{N}$ of the normal ideals of a Boolean ring A is a minimal complete invariant extension of the Boolean ring $\mathfrak{P}$ of the principal ideals of A.*

Proof. See Theorems 68 and 77.

Theorem 81. *Any minimal complete invariant extension N of a Boolean ring A is isomorphic with the Boolean ring $\mathfrak{N}$ of the normal ideals of A, and there is exactly one isomorphism between N and $\mathfrak{N}$ carrying every element a of A into the principal ideal $\mathfrak{a}(a)$ of A.*

Proof. Since N is a complete Boolean ring, every normal ideal of N is principal according to Theorem 18. If a is an element of N, $\mathfrak{b}(a)$ the principal ideal of N generated by a, and we put

$$\mathfrak{a} = A \cdot \mathfrak{b}(a) \tag{31}$$

then $\mathfrak{a}$ is a normal ideal of A, and any normal ideal of A can be obtained in this way. (Theorem 57.) On the other side N is, by Theorem 77, a join-extension of A. Therefore we get from (31)

$$a = \sum^{(N)}_{x\in\mathfrak{a}} x. \tag{32}$$

(See Theorem 58.) We see that to different elements a of N there correspond different normal ideals $\mathfrak{a}$ of $\mathfrak{N}$. Finally it is obvious that the biunivocal correspondence between N and $\mathfrak{N}$ defined by (31) or (32) preserves inclusion. Hence it is an isomorphism between N and $\mathfrak{N}$. If $a \in A$, then $A \cdot \mathfrak{b}(a) = \mathfrak{a}(a)$. That there is but one such isomorphism follows from Theorems 59 and 68.

Theorem 82. *If A and A* are Boolean rings between which there exists an isomorphism Λ, N a minimal complete invariant extension of A, and N* a minimal complete invariant extension of A*, then there exists exactly one extension of the isomorphism Λ to an isomorphism Λ_N between N and N*.*

In particular we may say that any two minimal complete invariant extensions of the same Boolean ring are abstractly identical.

The proof of Theorem 82 follows easily from Theorems 59 and 81.

Now we can state the following generalization of Theorem 59.

THEOREM 83. *If A and A^* are Boolean rings between which there exists an isomorphism Λ, R a join-extension of A, and $\hat{R}$ a join-extension of A^*, then there exists at the utmost one subring R^* of $\hat{R}$ containing A^* such that the isomorphism Λ can be extended to an isomorphism Λ_R between R and R^*. R^* exists if and only if $\sum^{(\hat{R})}_{a^* \varepsilon \mathfrak{a}^*} a^*$ exists whenever b is an element of R, and $\mathfrak{a}^*$ is the subclass of A^* assigned to the element b of R in the same way as in Theorem 59. In this case R^* is the class of all such joins $\sum^{(\hat{R})}_{a^* \varepsilon \mathfrak{a}^*} a^*$, the isomorphism Λ_R is unique, and the element b^* of R^*, assigned to the element b of R by virtue of Λ_R, is given by the equation*

$$b^* = \sum_{a^* \varepsilon \mathfrak{a}^*}^{(\hat{R})} a^*.$$

Hence if $\hat{R}$ is especially a completion of A^*, then R^* certainly exists.

PROOF. In face of Theorems 59, 61, and 64 we may restrict ourselves to prove that the existence of all joins $\sum^{(\hat{R})}_{a^* \varepsilon \mathfrak{a}^*} a^*$ implies that R^* exists. Let N be a completion of R, and N^* a completion of $\hat{R}$. (See Theorem 79.) It is obvious that N and N^* are also completions of A and A^* respectively. Hence the isomorphism Λ can be extended to an isomorphism Λ_N between N and N^* in exactly one way. (Theorem 82.) And in face of Theorem 59 it is obvious that the existence of all our joins $\sum^{(\hat{R})}_{a^* \varepsilon \mathfrak{a}^*} a^*$ implies that the subring R^* of N^* into which R is carried by Λ_N is contained in $\hat{R}$. Thus we have proved what we had wished to.

In the rest of this paragraph we shall state some corollaries of Theorems 46, 49, 50, 51, 52, and 68. Here and in the next paragraph we shall consider a fixed Boolean ring A; the Boolean ring of the principal ideals of A will be denoted by $\mathfrak{P}$, and the Boolean ring of the normal ideals of A by $\mathfrak{N}$. Notice Theorem 38.

THEOREM 84. *An element a is an interelement of a sequence a_n if and only if*

$$(33) \qquad {}^{(\mathfrak{N})}\varliminf_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n) \subset \mathfrak{a}(a) \subset {}^{(\mathfrak{N})}\varlimsup_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n).$$

PROOF. See Theorems 11, 46, 49, and 68.

THEOREM 85. $\varliminf_{n\to\infty} a_n$ *exists if and only if* ${}^{(\mathfrak{N})}\varliminf_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n)$ *is a principal ideal $\mathfrak{a}(a)$; in this case we have*

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = a.$$

PROOF. See Theorems 51 and 68.

THEOREM 86. $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ *exists if and only if* ${}^{(\mathfrak{N})}\varlimsup_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n)$ *is a principal ideal $\mathfrak{a}(a)$; in this case we have*

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = a.$$

PROOF. See Theorems 52 and 68.

THEOREM 87. *A sequence of elements a_n of a Boolean ring A is convergent with respect to A if and only if the sequence of the principal ideals $\mathfrak{a}(a_n)$ is convergent with respect to $\mathfrak{N}$, and its limit is a principal ideal $\mathfrak{a}(a)$; in this case we have*

$${}^{(A)}\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

PROOF. See Theorems 50 and 68.

At this place we mention a theorem which may be considered as a generalization of Theorem 20:

THEOREM 88. *If $\mathfrak{U}$ is the class of the subelements of a sequence a_n, we have*

$$(34) \qquad {}^{(\mathfrak{N})}\varliminf_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n) = \mathfrak{U}''.$$

PROOF. It is evident that

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}^{(\mathfrak{J})} \prod_{k=n}^{\infty}{}^{(\mathfrak{N})} \mathfrak{a}(a_k) = \mathfrak{U}$$

if $\mathfrak{J}$ is the distributive lattice of the ideals of the given Boolean ring, and from this and from Theorem 36 there ensues immediately the asserted Relation (34).

6. Relations between Interelements, Lower and Upper Limits, and Limits

THEOREM 89. *If $a_n < b_n$ for $n = 1, 2, 3, \cdots$, a is an interelement of the sequence a_n, and $\varliminf_{n\to\infty} b_n$ exists, then*

$$(35) \qquad a < \varliminf_{n\to\infty} b_n.$$

THEOREM 90. *If $a_n < b_n$ for $n = 1, 2, 3, \cdots$, $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ exists, and b is an interelement of the sequence b_n, then*

$$(36) \qquad \varlimsup_{n\to\infty} a_n < b.$$

PROOF OF THEOREMS 89 AND 90. It is obvious that $a_n < b_n$ for $n = 1, 2, 3, \cdots$ implies

$${}^{(\mathfrak{N})}\varliminf_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n) \subset {}^{(\mathfrak{N})}\varliminf_{n\to\infty} \mathfrak{a}(b_n)$$

and

$${}^{(\mathfrak{N})}\varlimsup_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n) \subset {}^{(\mathfrak{N})}\varlimsup_{n\to\infty} \mathfrak{a}(b_n).$$

After this is settled Theorems 89 and 90 can be easily concluded from Theorem 84.

THEOREM 91. *If $a_n < b_n$ for $n = 1, 2, 3, \cdots$ then those of the relations*

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n < \varliminf_{n\to\infty} b_n$$

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n < \varlimsup_{n\to\infty} b_n$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n < \varlimsup_{n\to\infty} b_n$$

hold in which both sides exist.

PROOF. See Theorems 89 and 90.

THEOREM 92. *If* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, *and* $a_n < b_n$ *for* $n = 1, 2, 3, \cdots$ *then also*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Notice that 0 is the only subelement and the only interelement of the sequence a_n.

LEMMA 8. *If* $a_k < a_l$ *and* $b_k < b_l$ *for* $k < l$, $k, l = 1, 2, 3, \cdots$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *exist, then* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *exists too and is equal to* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

PROOF. We have obviously

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n > a_k b_k$$

for every k. If $c > a_n b_n$ for every n then

$$c > a_k b_l$$

for $k, l = 1, 2, 3, \cdots$. From this inequality we get by using twice Theorem 13 the inequality

$$c > \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

which proves the assertion.

LEMMA 9. *If* $a_k > a_l$ *and* $b_k > b_l$ *for* $k < l$, $k, l = 1, 2, 3, \cdots$ *and* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *and* $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ *exist, then* $\prod_{n=1}^{\infty} (a_n \vee b_n)$ *exists too and is equal to* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n \vee \prod_{n=1}^{\infty} b_n$.

PROOF. $\prod_{n=1}^{\infty} a_n \vee \prod_{n=1}^{\infty} b_n < a_k \vee b_k$ for every k. If $c < a_n \vee b_n$ for every n then $c < a_k \vee b_l$ for $k, l = 1, 2, 3, \cdots$. Hence we get by using twice Theorem 12

$$c < \prod_{n=1}^{\infty} a_n \vee \prod_{n=1}^{\infty} b_n .$$

This proves the assertion.

THEOREM 93. *If* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *and* $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ *exist then* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n$ *exists too and is equal to* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

PROOF.

$$^{(\mathfrak{R})}\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n b_n) = {}^{(\mathfrak{R})}\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n)\mathfrak{a}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \prod_{k=n}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \mathfrak{a}(a_k)\mathfrak{a}(b_k)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \left[\prod_{k=n}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \mathfrak{a}(a_k) \cdot \prod_{k=n}^{\infty} \mathfrak{a}(b_k)\right];$$

hence, by Lemma 8,

$$^{(\mathfrak{R})}\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \prod_{k=n}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \mathfrak{a}(a_k) \cdot \sum_{n=1}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \prod_{k=n}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \mathfrak{a}(b_k) = {}^{(\mathfrak{R})}\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n) \cdot {}^{(\mathfrak{R})}\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathfrak{a}(b_n),$$

and, by Theorem 85,

$$^{(\mathfrak{R})}\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n b_n) = \mathfrak{a}(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n) \cdot \mathfrak{a}(\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n) = \mathfrak{a}(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n);$$

from this follows, again by Theorem 85, the assertion.

THEOREM 94. *If* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *and* $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ *exist then* $\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n \vee b_n)$ *exists too and is equal to* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \vee \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

PROOF. Compare the proof of Theorem 93 and see Lemma 9 and Theorem 86.

THEOREM 95. *If* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *and* $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ *exist then* $\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n)$ *exists too and is equal to* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

PROOF. We have

$$\mathfrak{a}(a_n + a_n b_n) = \mathfrak{a}(a_n) \cdot \mathfrak{a}'(b_n)$$

and, by Lemma 6,

$$^{(\mathfrak{R})}\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathfrak{a}'(b_n) = [{}^{(\mathfrak{R})}\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathfrak{a}(b_n)]';$$

hence we have, by Theorem 93,

$$^{(\mathfrak{R})}\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n + a_n b_n) = \mathfrak{a}(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n) \cdot \mathfrak{a}'(\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n) = \mathfrak{a}(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n).$$

THEOREM 96. *If* a *is an interelement of the sequence* a_n, *and* b *an interelement of the sequence* b_n, *then those of the inequalities*

$$ab > \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n,$$

$$a \vee b < \overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n \vee b_n),$$

and

$$a + ab > \underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n)$$

hold the right-hand sides of which exist.

PROOF. See Theorems 84, 93, 94, and 95.

THEOREM 97. *If* a *is an interelement of the sequence* a_n, *and* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *exists, then* $a \lim_{n\to\infty} b_n$ *is an interelement of the sequence* $a_n b_n$.

PROOF. We have for $l = 1, 2, 3, \cdots$

$$^{(\mathfrak{R})}\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n b_n) = {}^{(\mathfrak{R})}\overline{\lim}_{n\to\infty} [\mathfrak{a}(a_n)\mathfrak{a}(b_n)] = \prod_{n=1}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \sum_{k=n}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \mathfrak{a}(a_k)\mathfrak{a}(b_k)$$

$$= \prod_{n=l}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \sum_{k=n}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \mathfrak{a}(a_k)\mathfrak{a}(b_k) \supset \left[\prod_{n=l}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \sum_{k=n}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \mathfrak{a}(a_k)\right] \cdot \prod_{m=l}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \mathfrak{a}(b_m)$$

$$= {}^{(\mathfrak{R})}\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n) \cdot \prod_{m=l}^{\infty}{}^{(\mathfrak{R})} \mathfrak{a}(b_m),$$

hence

$$ {}^{(\mathfrak{R})}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathfrak{a}(a_n b_n) \supset {}^{(\mathfrak{R})}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathfrak{a}(a_n) \cdot {}^{(\mathfrak{R})}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}(b_n) = {}^{(\mathfrak{R})}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathfrak{a}(a_n) \cdot \mathfrak{a}(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n) $$

$$ \supset \mathfrak{a}(a) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = \mathfrak{a}(a \lim_{n\to\infty} b_n). $$

On the other side it follows from the first relation of Theorem 96 that

$$ \mathfrak{a}(a) \cdot \mathfrak{a}(\lim_{n\to\infty} b_n) \supset {}^{(\mathfrak{R})}\lim_{n\to\infty} [\mathfrak{a}(a_n)\mathfrak{a}(b_n)], $$

or

$$ \mathfrak{a}(a \lim_{n\to\infty} b_n) \supset {}^{(\mathfrak{R})}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n b_n). $$

This proves the assertion, according to Theorem 84.

THEOREM 98. (Corollary of Theorem 97.) *If* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *and* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *exist then* $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$ *is an interelement of the sequence* $a_n b_n$.

THEOREM 99. *If* a *is an interelement of the sequence* a_n, *and* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *exists, then* $a \vee \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ *is an interelement of the sequence* $a_n \vee b_n$.

Theorem 99 can be proved in a way dually corresponding to the proof of Theorem 97.

THEOREM 100. (Corollary of Theorem 99.) *If* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *and* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *exist then* $\lim_{n\to\infty} a_n \vee \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ *is an interelement of the sequence* $a_n \vee b_n$.

THEOREM 101. *If* a *is an interelement of the sequence* a_n, *and* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *exists, then* $a + a \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ *is an interelement of the sequence* $a_n + a_n b_n$.

PROOF. We have

$$ \mathfrak{a}(a + a \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n) = \mathfrak{a}(a) \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathfrak{a}'(b_n) $$

(see Lemma 6); hence $\mathfrak{a}(a + a \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n)$ is, by Theorem 97, an interelement of the sequence $\mathfrak{a}(a_n)\mathfrak{a}'(b_n) = \mathfrak{a}(a_n + a_n b_n)$ with respect to $\mathfrak{R}$.

THEOREM 102. (Corollary of Theorem 101.) *If* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *and* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *exist then* $\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$ *is an interelement of the sequence* $a_n + a_n b_n$.

THEOREM 103. *If* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *exists, and* b *is an interelement of the sequence* b_n, *then* $\lim_{n\to\infty} a_n + b \lim_{n\to\infty} a_n$ *is an interelement of the sequence* $a_n + a_n b_n$.

The proof follows from the equation

$$ \mathfrak{a}(\lim_{n\to\infty} a_n + b \lim_{n\to\infty} a_n) = {}^{(\mathfrak{R})}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n) \cdot \mathfrak{a}'(b) $$

and from Theorem 97; for $\mathfrak{a}'(b)$ is, by Lemma 7, an interelement of the sequence $\mathfrak{a}'(b_n)$ with respect to $\mathfrak{R}$

THEOREM 104. (Corollary of Theorem 103.) *If* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *and* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *exist then* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ *is an interelement of the sequence* $a_n + a_n b_n$.

THEOREM 105. *If* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *and* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *exist, and* x *is an interelement of the sequence* $a_n b_n$, *then*

$$ x < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n. $$

PROOF. We have, by Theorem 89,

$$ x < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n $$

and

$$ x < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n; $$

hence

$$ x < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n. $$

THEOREM 106. *If* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *and* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *exist, and* x *is an interelement of the sequence* $a_n \vee b_n$, *then*

$$ x > \lim_{n\to\infty} a_n \vee \lim_{n\to\infty} b_n. $$

PROOF. We have, by Theorem 90,

$$ x > \lim_{n\to\infty} a_n $$

and

$$ x > \lim_{n\to\infty} b_n; $$

hence

$$ x > \lim_{n\to\infty} a_n \vee \lim_{n\to\infty} b_n. $$

THEOREM 107. *If* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *and* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *exist, and* x *is an interelement of the sequence* $a_n + a_n b_n$, *then*

$$ x < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n. $$

PROOF. Since $\mathfrak{a}(x)$ is an interelement of the sequence $\mathfrak{a}(a_n + a_n b_n) = \mathfrak{a}(a_n)\mathfrak{a}'(b_n)$ with respect to $\mathfrak{R}$, we have, by Theorem 105 and Lemma 6,

$$ \mathfrak{a}(x) \subset {}^{(\mathfrak{R})}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathfrak{a}(a_n) \cdot {}^{(\mathfrak{R})}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}'(b_n) = {}^{(\mathfrak{R})}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathfrak{a}(a_n) \cdot ({}^{(\mathfrak{R})}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}(b_n))' $$

$$ = \mathfrak{a}(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n) \cdot \mathfrak{a}'(\lim_{n\to\infty} b_n) = \mathfrak{a}(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n). $$

Theorem 108. *Those of the following inclusion-relations* (37) *till* (53) *which have a sense are valid:*

(37) $$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n < \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(38) $$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n < \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(39) $$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n > \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(40) $$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n < \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(41) $$\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n \vee b_n) > \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \vee \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(42) $$\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n \vee b_n) > \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \vee \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(43) $$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n \vee b_n) < \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \vee \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(44) $$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n \vee b_n) > \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \vee \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(45) $$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n) < \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(46) $$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n) < \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(47) $$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n) < \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(48) $$\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n) > \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(49) $$\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n) > \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(50) $$\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n) < \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(51) $$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) < \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(52) $$\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) > \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(53) $$\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) > \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

Proof.

Relation	(37)	(38)	(39)	(40)	(41)	(42)	(43)	(44)	(45)	(46)	(47)	(48)	(49)	(50)
Follows from Theorem	98	105	98	105	100	106	100	106	104	102	107	104	102	107

If $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$, and $\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ exist then $\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n)$ exists too and is equal to $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$. (Theorem 95.) On the other side we have $a_n + a_n b_n = (a_n + b_n)a_n$ whence

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n .$$

(Theorem 93.) Thus we have

(54) $$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n)\, \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n .$$

Further $\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n)\, \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ is, by Theorem 98, an interelement of the sequence $(a_n + b_n)b_n = a_n b_n + b_n$. Hence we have, by Theorem 107,

(55) $$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n)\, \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n < \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n .$$

From (54) and (55) we get

(56) $$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \cdot (\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \vee \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n) < \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n .$$

Since $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \vee \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ is, by Theorem 100, an interelement of the sequence $a_n \vee b_n$, and $a_n + b_n < a_n \vee b_n$, we have, by Theorem 90,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) < \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \vee \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n .$$

Thus (56) involves (51).

If $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$, and $\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ exist then $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ and $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ are, by Theorem 104, interelements of the sequences $a_n + a_n b_n$ and $a_n b_n + b_n$ respectively. Hence we have, according to the second relation of Theorem 96,

$$(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n) \vee (\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n)$$
$$< \overline{\lim}_{n\to\infty} [(a_n + a_n b_n) \vee (a_n b_n + b_n)],$$

i.e. Relation (52). Relation (53) we can prove in the same way, using Theorem 102 instead of Theorem 104.

Theorem 109. *If* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *and* $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ *exist then* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n$ *exists too and is equal to* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

Proof. See Theorems 98 and 105.

Theorem 110. *If* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *and* $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ *exist then* $\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n \vee b_n)$ *exists too and is equal to* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \vee \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

Proof. See Theorems 100 and 106.

Theorem 111. *If* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *and* $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ *exist then* $\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n)$ *exists too and is equal to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

Proof. See Theorems 104 and 107.

Theorem 112. *If* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *and* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *exist then* $\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n)$ *exists too and is equal to* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Proof. See Theorems 102 and 107.

Theorem 113. *If* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *and* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *exists then* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *is an interelement of the sequence* $a_n + b_n$.

Proof. We have, by Theorem 95,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \tag{57}$$

and, by Theorem 111,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n b_n + b_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} b_n . \tag{58}$$

From (57) and (58) and from Theorem 100 follows Theorem 113.

Theorem 114. *If* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *and* $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ *exist then* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ *is an interelement of the sequence* $a_n + b_n$.

Proof. Compare the proof of Theorem 113 and see Theorems 95, 112, and 100.

Theorem 115. *If the sequences* a_n *and* b_n *converge, the sequences* $a_n b_n$, $a_n \vee b_n$, *and* $a_n + b_n$ *converge too, and we have*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n , \tag{59}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \vee b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \vee \lim_{n\to\infty} b_n , \textit{ and} \tag{60}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n . \tag{61}$$

Proof. (59) follows from Theorems 93 and 109, and (60) from Theorems 94 and 110. Further Theorems 95 and 111 (or 112) involve

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \tag{62}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} b_n . \tag{63}$$

From (62) and (63) follows (61), by the aid of (60).

Theorem 116. *If* $a_k a_l = 0$ *for* $k, l = 1, 2, 3, \cdots, k \neq l$ *then*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Proof. 0 is obviously the only subelement of the sequence a_n ; hence we have, by Theorem 21,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0.$$

If a is an arbitrary interelement of the sequence a_n , then aa_k is an interelement of the sequence $a_n a_k$ for every k. Hence $aa_k = 0$ for $k = 1, 2, 3, \cdots$. (See Theorem 25.) Since a is also an interelement of the sequence aa_n , we obtain

$$a = 0.$$

This proves the theorem.

7. The Closure-Topology $\Gamma(\tau(A))$

The sequential topology $\tau(A)$ in a Boolean ring A, defined by Definition 8, determines a closure-topology $\Gamma(\tau(A))$. (Compare (III), Theorem 15.) Our Theorem 29 involves that a subclass of A is closed if and only if it contains with every convergent sequence also its limit.

Theorem 117. *Any closed subring* $\mathfrak{a}$ *of a Boolean* σ*-ring* A *is itself a Boolean* σ*-ring.*

Proof. If a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ are elements of $\mathfrak{a}$ then $\prod_{n=1}^{\infty}{}^{(A)} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty}{}^{(A)} a_n$ exist and are contained in $\mathfrak{a}$. Hence, by Theorem 47, $\prod_{n=1}^{\infty}{}^{(\mathfrak{a})} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty}{}^{(\mathfrak{a})} a_n$ exist too. (They are even identical with $\prod_{n=1}^{\infty}{}^{(A)} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty}{}^{(A)} a_n$ respectively.)

Theorem 118. *If* $\mathfrak{a}$ *is an invariant* σ*-subring of a Boolean ring* A, *and* a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ *are elements of* $\mathfrak{a}$, *then* ${}^{(A)}\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *and* ${}^{(A)}\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *exist and are contained in* $\mathfrak{a}$. *Hence* $\mathfrak{a}$ *is especially a closed subring of* A.

Proof. See Theorems 38, 51, and 52.

Theorem 119. *If* a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ *are elements of a closed ideal* $\mathfrak{a}$ *of a Boolean ring* A, *and* a *is an interelement of the sequence* a_n *with respect to* A, *then* a *is contained in* $\mathfrak{a}$.

Proof. We have, by Theorem 42,

$${}^{(A)}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}{}^{(A)} a_k a = \sum_{k=1}^{\infty}{}^{(A)} a_k a = a.$$

$a_k a$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ are elements of $\mathfrak{a}$ because $\mathfrak{a}$ is an ideal. The same holds also for all elements of the sequence $\sum_{k=1}^{n}{}^{(A)} a_k a$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$; thus also for its limit a because $\mathfrak{a}$ is closed.

Theorem 120. *Every normal ideal of a Boolean ring is closed.*

Theorem 120 can be easily deduced from the definition of a normal ideal and from Lemma 5.

THEOREM 121. *If A is an invariant subring of a Boolean ring B, N is the maximal join-extension of A invariant in B, a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ are elements of N, a is an element of B, and either of the relations ${}^{(B)}\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n = a$ and $\overline{\lim}^{(B)}_{n\to\infty}\, a_n = a$ is valid, then a is contained in N. N is especially a closed subring of B.*

PROOF. Let $\bar{B}$ be a complete invariant extension of B (see Theorem 69) so that A is, by Theorem 53, invariant in $\bar{B}$, and $\bar{N}$ the maximal join-extension of A invariant in $\bar{B}$. (Compare the proof of Theorem 70.) If now a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ are elements of N, and ${}^{(B)}\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ exists, we have, by Theorem 51,

$$ {}^{(\bar{B})}\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n = {}^{(B)}\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n ; $$

on the other side the elements a_n are also elements of $\bar{N}$. Hence ${}^{(\bar{B})}\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ is, by Theorems 70, 75, and 118, an element of $\bar{N}$. From this and from the definitions of N and $\bar{N}$ it can be easily concluded that ${}^{(B)}\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ is an element of N. If a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ are elements of N, and ${}^{(B)}\overline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ exists, we can conclude in a similar way.

THEOREM 122. *If A is an invariant subring of a Boolean σ-ring B, the maximal join-extension of A invariant in B is itself a Boolean σ-ring.*

PROOF. See Theorems 117 and 121.

8. Double Sequences

DEFINITION 13. *Suppose that to every element of some class Θ of ordered couples (m, n) of natural numbers there is assigned an element a_{mn} of a given Boolean ring A. We say that such a correspondence defines a double sequence in A if to every natural number k there exist two natural numbers m and n such that $m \geqq k$, $n \geqq k$, and $(m, n) \in \Theta$.*

DEFINITION 14. *Let $a_{mn}^{(1)}$ and $a_{mn}^{(2)}$ be two double sequences in a Boolean ring, and $\Theta^{(1)}$ and $\Theta^{(2)}$ the classes of ordered couples of natural numbers for which they are defined. In this case we say the double sequence $a_{mn}^{(1)}$ to be a partial sequence of the the double sequence $a_{mn}^{(2)}$ if $\Theta^{(1)} \subset \Theta^{(2)}$ and $a_{mn}^{(1)} = a_{mn}^{(2)}$ for $(m, n) \in \Theta^{(1)}$.*

DEFINITION 15. *Let a_{mn} be a double sequence in a Boolean ring A, Θ the class of ordered couples of natural numbers belonging to it, and u an element of A. In this case we call u a subelement of the double sequence a_{mn} if there is a natural number k such that*

$$ u < a_{mn} $$

for $m \geqq k$, $n \geqq k$, $(m, n) \in \Theta$.

DEFINITION 16. *If the signs A, a_{mn}, and Θ have the same meaning as in Definition 15, we call an element o of A a superelement of the double sequence a_{mn} if there is a natural number k such that*

$$ o > a_{mn} $$

for $m \geqq k$, $n \geqq k$, $(m, n) \in \Theta$.

Now the notions of interelement, lower limit, upper limit, convergence, and limit can be defined for double sequences just so as for simple sequences. If a_{mn} is a double sequence in a Boolean ring A, the sign Θ has the same meaning as in Definition 13, and the lower limit of the double sequence a_{mn} with respect to A exists, we denote this lower limit by ${}^{(A)}\underline{\lim}_{\substack{m,n\to\infty\\(m,n)\in\Theta}}\, a_{mn}$ or more simply by ${}^{(A)}\underline{\lim}_{m,n\to\infty}\, a_{mn}$ in case Θ is the class of all ordered couples of natural numbers. The signs ${}^{(A)}\overline{\lim}_{\substack{m,n\to\infty\\(m,n)\in\Theta}}\, a_{mn}$, ${}^{(A)}\overline{\lim}_{m,n\to\infty}\, a_{mn}$, ${}^{(A)}\lim_{\substack{m,n\to\infty\\(m,n)\in\Theta}}\, a_{mn}$ and ${}^{(A)}\lim_{m,n\to\infty}\, a_{mn}$ are to be understood in similar sense. In all these signs the superscript (A) may be omitted if there is no doubt to which Boolean ring they refer.

All theorems on simple sequences obtained until now, except Theorems 31, 32, 33, 34, and 35, can be pronounced with little changes of the wording also for doubles sequences. For instance Theorems 29 and 30 assume the following forms:

THEOREM 29′: *If $a_{mn}^{(1)}$ is a partial sequence of a double sequence $a_{mn}^{(2)}$, $\Theta^{(1)}$ and $\Theta^{(2)}$ are the corresponding classes of ordered couples of natural numbers, and $\lim_{\substack{m,n\to\infty\\(m,n)\in\Theta^{(2)}}} a_{mn}^{(2)}$ exists, then $\lim_{\substack{m,n\to\infty\\(m,n)\in\Theta^{(1)}}} a_{mn}^{(1)}$ exists too and is equal to $\lim_{\substack{m,n\to\infty\\(m,n)\in\Theta^{(2)}}} a_{mn}^{(2)}$.*

THEOREM 30′. *Any system of a finite number of convergent double sequences with the same limit is again convergent with the same limit, if by a subelement (superelement) of a system of double sequences be meant a common subelement (superelement) of these double sequences, and the notions of an interelement, lower limit, and limit of a system of double sequences be defined accordingly.*

In Theorems 36 and 37 the signs $\prod_{k=n}^{\infty} a_k$ and $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ are to be replaced by the signs $\prod_{\substack{k,l=n\\(k,l)\in\Theta}}^{\infty} a_{kl}$ and $\sum_{\substack{k,l=n\\(k,l)\in\Theta}}^{\infty} a_{kl}$ respectively. Also Theorems 39, 40, 41, and 42 are to be changed in a similar way.

A special case of Theorem 29′ is

THEOREM 123. *If a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3, \cdots)$ are elements of a Boolean ring, m_k and n_k $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ natural numbers such that $m_k \to \infty$ and $n_k \to \infty$ for $k \to \infty$, and $\lim_{m,n\to\infty} a_{mn}$ exists, then $\lim_{k\to\infty} a_{m_k n_k}$ exists too and is equal to $\lim_{m,n\to\infty} a_{mn}$.*

It is an open question whether Theorem 123 can be inverted, i.e. whether $\lim_{k\to\infty} a_{m_k n_k} = a$ whenever $m_k \to \infty$ and $n_k \to \infty$ for $k \to \infty$, implies $\lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = a$. We shall return to this point once more in §10.

9. Fundamental Sequences

DEFINITION 17. *A sequence of elements a_n of a Boolean ring A is said to be a fundamental sequence with respect to A if*

$$ {}^{(A)}\lim_{m,n\to\infty} (a_m + a_n) = 0. $$

Theorem 124. *A sequence a_n is a fundamental sequence if and only if the sequence $a_n b$ is a fundamental sequence for every element b.*

Proof. See Definition 17, Theorem 5, and Lemma 5.

Theorem 125. *A bounded sequence is a fundamental sequence if and only if the following condition is satisfied: if x is an element of the property that*

$$x < o + u$$

whenever u is a subelement, and o a superelement of the sequence, then $x = 0$.

Proof. If u is a subelement and o a superelement of the sequence a_n then $o + u$ is a superelement of the double sequence $a_m + a_n$. Conversely to every superelement o^* of the double sequence $a_m + a_n$ there exist a subelement u and a superelement o of the sequence a_n such that

$$o^* = o + u. \tag{64}$$

For if o^* is a superelement of the double sequence $a_m + a_n$, there exists a natural number k such that

$$a_m + a_n < o^* \tag{65}$$

for $m \geqq k$, $n \geqq k$. From (65) follows

$$a_m + a_m o^* < a_n < a_m \vee o^*.$$

Hence $a_m + a_m o^*$ is a subelement, and $a_m \vee o^*$ a superelement of the sequence a_n, provided that $m \geqq k$. On the other side (64) is satisfied if we put $u = a_m + a_m o^*$, $o = a_m \vee o^*$.

After this is settled Theorem 125 follows easily from Theorem 22.

It is obvious that the fundamental sequences of a Boolean ring can be defined by their properties stated in Theorems 124 and 125. Compare Definitions 3 and 4.

Theorem 126. *Any fundamental sequence has at the utmost one interelement.*

Proof. If a and a^* are interelements of the sequence a_n then $a + aa^*$ and 0 are interelements of the bounded sequence $a_n(a + aa^*)$. Hence 0 is the only subelement of the latter sequence, and if o is a superelement of this sequence, then

$$a + aa^* < o.$$

The more we may say that

$$a + aa^* < o + u$$

whenever u is a subelement and o a superelement of the sequence $a_n(a + aa^*)$. If the sequence a_n is a fundamental sequence, the sequence $a_n(a + aa^*)$ is, by Theorem 124, likewise a fundamental sequence, and from Theorem 125 follows $a + aa^* = 0$. Just so we can prove that $a^* + aa^* = 0$. Hence $a^* = a$.

Theorem 127. *Every convergent sequence is a fundamental sequence.*

Proof. See Definition 17 and Relation (61) of Theorem 115.

On the other hand it is not true that every sequence without an interelement is a fundamental sequence. Let A be the Boolean ring of all finite classes of natural numbers, for $n = 1, 2, 3, \cdots$: $a_{2n-1} = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ (the class of the numbers $1, 2, 3, \cdots, n$), $a_2 = 0$ (the void class), and $(n = 2, 3, \cdots)$ $a_{2n} = \{2, 3, \cdots, n\}$. Then the sequence a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ has no interelement (there is no element a satisfying $a > u$ for all subelements u of the sequence), and it is not a fundamental sequence either.

Theorem 128. *If $\mathfrak{a}$ is an invariant subring of a Boolean ring A, and a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ are elements of $\mathfrak{a}$, then the sequence a_n is a fundamental sequence with respect to $\mathfrak{a}$ if and only if it is a fundamental sequence with respect to A.*

Proof. See Theorem 50 and Definition 17.

Theorem 129. *A sequence of elements a_n of a Boolean ring A is a fundamental sequence with respect to A if and only if the sequence $\mathfrak{a}(a_n)$ is convergent with respect to $\mathfrak{R}$.*

Proof. See Theorems 38, 68, 126, 127, and 128.

Theorem 130. *Every monotonic sequence of elements of a Boolean ring is a fundamental sequence.*

Proof. See Theorems 35 and 129.

Definition 18. *A Boolean ring A is called σ-complete if every fundamental sequence in A converges with respect to A.*

Theorem 131. *A Boolean ring A is σ-complete if and only if A is a Boolean σ-ring.*

Proof. If all fundamental sequences of A converge, and a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ are elements of A, then from Theorems 32, 34, and 130 follows that $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ exist. If A is a Boolean σ-ring, every fundamental sequence of A has, by Theorems 38 and 126, exactly one interelement.

D. van Dantzig (I) has shown how every topological ring, satisfying the neighbourhood-axioms of Fréchet-Hausdorff and having the property that sum, difference, and product of two elements of the ring are continuous functions of these elements, can be extended to a topological ring of the same kind and of the property that every fundamental sequence of the extended ring is convergent. In this paper we have defined for every Boolean ring A an intrinsic sequential topology $\tau(A)$, and have not considered any other sequential topology in A until now. Therefore if we consider an extension B of A we are interested only in the case that B is again a Boolean ring, and that the sequential topology $\tau(B)$ is an extension of the sequential topology $\tau(A)$. We know already that $\tau(B)$ is certainly an extension of $\tau(A)$ if B is an invariant extension of A. (Theorem 50.) And Theorems 69 and 131 show that any Boolean ring A can be invariantly extended to a Boolean ring B in which every fundamental sequence converges. Now we shall try to define the notion of a *minimal* invariant extension of A of this property, analogous to the notion of a minimal complete invariant extension of A, defined by Definition 12.

Theorem 132. *If we mean by the sum of two sequences a_n and b_n in a Boolean ring A the sequence $a_n + b_n$, and by their product the sequence $a_n b_n$, the sequences* *in A form a Boolean ring S; the fundamental sequences in A form a subring F of S, the convergent sequences in A form a subring C of F, and the null sequences* (sequences converging towards zero) *form an ideal $\mathfrak{n}$ in C.*

PROOF. The first proposition is evident. The second proposition follows from the equations

$$(a_m + b_m) + (a_n + b_n) = (a_m + a_n) + (b_m + b_n)$$

$$a_m b_m + a_n b_n = a_m(b_m + b_n) + (a_m + a_n)b_n$$

and from Theorems 92 and 115, the third from Theorem 115, and the fourth from Theorems 92 and 115.

Now let A_1 be a homomorphic image of F such that there exists a homomorphism γ from F to A_1 determining exactly the ideal $\mathfrak{n}$ of F. (I.e. $\mathfrak{n}$ shall be the class of the elements of F carried by γ into the zero of A_1.) Such a homomorphic image of F is for instance the quotient-ring $F/\mathfrak{n}$. Two elements of C are carried by γ into the same element of A_1 if and only if they are sequences convergent with respect to A and having the same limit with respect to A. Hence if we denote the image of C in A_1 by C^* and assign to every element a of A that element of C^* in which the convergent sequence, having all terms equal to a, is carried by γ, then this correspondence is an isomorphism between A and C^*. Hence A_1 can be chosen in such a way that the image of the sequence $\{a, a, a, \cdots\}$ in A_1 is identical with a itself. In this case A_1 is an extension of A.

DEFINITION 19. *Let the signs A, F, C, and $\mathfrak{n}$ have the same meaning as in Theorem 132, and let A_1 be a homomorphic image of F, and γ a homomorphism $F \rightarrow A_1$ determining exactly the ideal $\mathfrak{n}$ of F and having the property that if a is an element of A, the element of A_1 in which γ carries the sequence having all terms equal to a, is identical with a. In this case we call A_1 a first fundamental extension of A.*

Two fundamental sequences a_n and b_n have the same image in A_1 if and only if their difference (this is here the same as $a_n + b_n$) is a null sequence. D. van Dantzig calls such fundamental sequences *concurrent.*

LEMMA 10. *If A_1 is a first fundamental extension of a Boolean ring A, then A is invariant in A_1.*

PROOF. Let $\mathfrak{B}$ be a subclass of A, and b an element of A such that

$$\sum_{a \in \mathfrak{B}}^{(A)} a = b.$$

Further let f be an element of A_1 such that

$$f > a$$

for all elements a of $\mathfrak{B}$. If a_n is a fundamental sequence in A, of which the image in A_1 is f, then the sequence $a_n a + a$ must be contained in $\mathfrak{n}$, i.e. we must have

$$^{(A)}\lim_{n\to\infty} a_n a = a.$$

Hence we have, by Theorem 41,

$$\sum_{k=n}^{\infty}{}^{(A)} a_k a = a$$

and

$$\sum_{a \in \mathfrak{B}}^{(A)} \sum_{k=n}^{\infty}{}^{(A)} a_k a = b$$

for $n = 1, 2, 3, \cdots$. Since the joins $\sum_{a \in \mathfrak{B}}^{(A)} a_k a$ exist (see Theorem 13) we can easily conclude that also

$$\sum_{k=n}^{\infty}{}^{(A)} \sum_{a \in \mathfrak{B}}^{(A)} a_k a = b.$$

Hence we have

$$\sum_{k=n}^{\infty}{}^{(A)} a_k b = b$$

and, by Theorem 41,

$$^{(A)}\lim_{n\to\infty} a_n b = b,$$

whence

$$^{(A)}\lim_{n\to\infty} a_n b = b$$

because $a_n b$ is a fundamental sequence. Thus we have $fb = b$ or $f > b$. This proves that

$$\sum_{a \in \mathfrak{B}}^{(A_1)} a = b.$$

THEOREM 133. *If the signs A, F, γ, and A_1 have the same meaning as in Definition 19 then any fundamental sequence in A converges with respect to A_1 to that element of A_1 which is its image by virtue of γ.*

PROOF. First we consider a monotonic sequence in A. Let $a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ be elements of A, and for instance $a_k < a_l$ for $k < l$, $k, l = 1, 2, 3, \cdots$. We have

$$^{(A)}\lim_{n\to\infty} a_n a_k = a_k. \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

Hence we have, if f is the image of the fundamental sequence a_n, for $k = 1, 2, 3, \cdots$

$$f a_k = a_k$$

or

$$f > a_k.$$

If g is an element of A_1, b_n a fundamental sequence in A the image of which is g, and $g > a_k$ for $k = 1, 2, 3, \cdots$, we have for $k = 1, 2, 3, \cdots$

$$ {}^{(A)}\lim_{n\to\infty} (a_k + a_k b_n) = 0, $$

whence

$$ \mathfrak{a}(a_k) + \mathfrak{a}(a_k)\, {}^{(\mathfrak{R})}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}(b_n) = 0, $$

$$ {}^{(\mathfrak{R})}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n) + {}^{(\mathfrak{R})}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}(a_n) . {}^{(\mathfrak{R})}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}(b_n) = 0, $$

$$ {}^{(A)}\lim_{n\to\infty} (a_n + a_n b_n) = 0, $$

and

$$ g > f. $$

This proves

$$ \sum_{k=1}^{\infty}{}^{(A_1)} a_k = {}^{(A_1)}\lim_{n\to\infty} a_n = f. $$

If $a_k > a_l$ for $k < l$, $k, l = 1, 2, 3, \cdots$, and f is again the image of the fundamental sequence a_n, we can prove in a similar way that

$$ \prod_{k=1}^{\infty}{}^{(A_1)} a_k = {}^{(A_1)}\lim_{n\to\infty} a_n = f. $$

Now let a_n be an arbitrary fundamental sequence in A, and f its image. From what we have just proved follows that $\prod_{l=1}^{\infty}{}^{(A_1)} a_{k+l-1}$ and $\sum_{l=1}^{\infty}{}^{(A_1)} a_{k+l-1}$ exist and are the images of the fundamental sequences $\prod_{l=1}^{n} a_{k+l-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ and $\sum_{l=1}^{n} a_{k+l-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ respectively. But we have

$$ {}^{(A)}\lim_{n\to\infty} \left(a_n \prod_{l=1}^{n} a_{k+l-1} + \prod_{l=1}^{n} a_{k+l-1} \right) = 0 $$

and

$$ {}^{(A)}\lim_{n\to\infty} \left(a_n + a_n \sum_{l=1}^{n} a_{k+l-1} \right) = 0. $$

Hence

$$ \prod_{l=1}^{\infty}{}^{(A_1)} a_{k+l-1} < f < \sum_{l=1}^{\infty}{}^{(A_1)} a_{k+l-1}. $$

From this relation it can be easily concluded that f is an interelement of the sequence a_n with respect to A_1. Since this sequence is, by Theorem 128 and Lemma 10, also with respect to A_1 a fundamental sequence, Theorem 133 is proved. (See Theorem 126.)

LEMMA 11. *If A_1 is a first fundamental extension of a Boolean ring A, then A_1 is also a join-extension of A.*

PROOF. A_1 is, by Lemma 10, an invariant extension of A. Let N be the maximal join-extension of A invariant in A_1. Then we have, by Theorem 121,

$$ N \supset A_1 $$

because all elements of A_1 are, by Theorem 133, limits of elements of A and by this limits of elements of N with respect to A_1. Hence $N = A_1$.

In the paper (I) the ring which corresponds to the ring denoted here by A_1, has already the property that all its fundamental sequences converge. We shall see that in our case this assertion is in general not true though D. van Dantzig's "Ringkomplettierungsaxiom" (the product of a null sequence and a fundamental sequence is a null sequence) is satisfied, according to Theorem 92.

LEMMA 12. *If A and A^* are Boolean rings between which there exists an isomorphism Λ, and A_1 and A_1^* are first fundamental extensions of A and A^* respectively, then A_1 and A_1^* are isomorphic too, and the isomorphism Λ can be extended to an isomorphism Λ_1 between A_1 and A_1^* in exactly one way.*

PROOF. Λ_1 can be defined in the following way: let f be an element of A_1, a_n a sequence of elements of A converging towards f with respect to A_1, a_n^* the sequence in A^* corresponding to the sequence a_n by virtue of Λ, and

$$ f^* = {}^{(A_1^*)}\lim_{n\to\infty} a_n^*; $$

this correspondence $f \to f^*$ is the desired isomorphism Λ_1.

In the following we shall denote by ρ the smallest ordinal number which is the ordinal type of an uncountable set. More precisely let ψ be the ordinal number of some uncountable well-ordered set, and ρ the smallest ordinal number satisfying $\rho \leqq \psi$ which is as well the ordinal type of an uncountable set.

DEFINITION 20. *Let A be an arbitrary Boolean ring, and α an ordinal number satisfying $\alpha \leqq \rho$. Let us assign a Boolean ring A_μ to any ordinal number μ satisfying $\mu \leqq \alpha$ by the following transfinite induction:*

1.) A_1 is a first fundamental extension of A;

2.) if the ordinal number μ has a predecessor ν (thus $\mu = \nu + 1$) then A_μ is a first fundamental extension of A_ν;

3.) if the ordinal number μ is a limit-number then

$$ A_\mu = \sum_{\nu<\mu} A_\nu, $$

the sign Σ denoting the set-theoretical union; the ring-operations in A_μ are defined in the following way: if a and b are elements of A_μ, and ν an ordinal number such that $\nu < \mu$, $a \in A_\nu$, $b \in A_\nu$, then

$$ a \Delta_{A_\mu} b = a \Delta_{A_\nu} b, $$

$$ a \wedge_{A_\mu} b = a \wedge_{A_\nu} b. $$

In this case we call A_α a fundamental extension of the Boolean ring A of the order α.

If μ is an ordinal number satisfying $\mu < \alpha$, the Boolean ring A_μ appearing in Definition 20 is obviously a fundamental extension of A of the order μ.

THEOREM 134. *If A is an arbitrary Boolean ring, α an ordinal number satisfying $\alpha \leqq \rho$, and A_α a fundamental extension of A of the order α, then A_α is a join-extension of A.*

PROOF. See Theorems 62 and 63, Lemma 11, and Definition 20.

THEOREM 135. *If A is an arbitrary Boolean ring, α and β are ordinal numbers satisfying $\beta < \alpha \leqq \rho$, A_α and A_β fundamental extensions of A of the orders α and β respectively, and $A_\beta \subset A_\alpha$, then A_α is a join-extension of A_β.*

PROOF. See Theorems 64 and 134.

LEMMA 13. *Let A be a subring of a Boolean ring B, and $A_{(1)}$ the class of all elements of B which are limits of sequences of elements of A with respect to B. Then $A_{(1)}$ is a subring of B containing A. If A is especially invariant in B then $A_{(1)}$ is a join-extension of A invariant in B.*

PROOF. It is evident that $A_{(1)} \supset A$. That $A_{(1)}$ is a subring of B follows from Theorem 115. If A is invariant in B, Theorem 121 involves that $A_{(1)}$ is contained in the maximal join-extension of A invariant in B.

DEFINITION 21. *If the signs A, B, and $A_{(1)}$ have the same meaning as in Lemma 13 then $A_{(1)}$ is called the first limit-ring of A in B.*

DEFINITION 22. *Let A be a subring of a Boolean ring B, and α an ordinal number satisfying $\alpha \leqq \rho$. Let us assign a subring $A_{(\mu)}$ of B to any ordinal number μ satisfying $\mu \leqq \alpha$ by the following transfinite induction:*

1.) *$A_{(1)}$ is the first limit-ring of A in B;*

2.) *if the ordinal number μ has a predecessor ν (so that $\mu = \nu + 1$) then $A_{(\mu)}$ is the first limit-ring of $A_{(\nu)}$ in B;*

3.) *if the ordinal number μ is a limit-number then*

$$A_{(\mu)} = \sum_{\nu<\mu}^{(\Re)} A_{(\nu)},$$

by $\Re$ denoted the lattice of all subrings of B.

In this case we call $A_{(\alpha)}$ the limit-ring of A in B of the order α.

THEOREM 136. *If A is an invariant subring of a Boolean ring B, then any limit-ring $A_{(\alpha)}$ of A in B is invariant in B and a join-extension of A and of every limit-ring of A in B of lower order.*

PROOF. From Definition 22 it can be easily concluded that $A_{(\alpha)}$ is contained in the maximal join-extension of A invariant in B. For the rest see Theorems 53, 61, 64, and 70.

THEOREM 137. *If A is any Boolean ring, α an ordinal number satisfying $\alpha \leqq \rho$, A_α a fundamental extension of A of the order α, and B an invariant extension of A_α, then A_α is the limit-ring of A in B of the order α.*

PROOF. Assign a Boolean ring A_μ to any ordinal number μ satisfying $\mu < \alpha$ in such a way that the rings A_μ ($\mu \leqq \alpha$) satisfy the conditions stated in Definition 20. Let us suppose that $\mu_0 < \alpha$, and that we have already proved that A_{μ_0} is the limit-ring of A in B of the order μ_0. Then let a_n be a sequence of elements of A_{μ_0} which has a limit a with respect to B. Since A_{μ_0} is, by Theorems 53, 61, and 135, invariant in B, the sequence a_n is a fundamental sequence with respect to A_{μ_0} according to Theorems 127 and 128. Hence this sequence has, by Definitions 19 and 20 and by Theorem 133, a limit with respect to A_{μ_0+1}, and this limit is necessarily identical with a, because also A_{μ_0+1} is invariant in B. Hence $a \in A_{\mu_0+1}$. If we assume conversely that a is an element of A_{μ_0+1} then a is, by Definitions 19 and 20 and Theorem 133, the limit of some sequence of elements of A_{μ_0} with respect to A_{μ_0+1}, and consequently also with respect to B because A_{μ_0+1} is invariant in B. Thus we find that a is an element of the limit-ring of A in B of the order $\mu_0 + 1$. Hence this limit-ring is identical with A_{μ_0+1}. We see that Theorem 137 can be proved by transfinite induction; for the conclusion from the predecessors of a limit-number to this limit-number itself is still simpler.

THEOREM 138. *If A is any Boolean ring, α and β ordinal numbers satisfying $\beta \leqq \alpha \leqq \rho$, and A_α a fundamental extension of A of the order α, then there exists exactly one subring A_β of A_α which is a fundamental extension of A of the order β.*

PROOF. The existence of A_β follows from Definition 20, the uniqueness from Theorem 137. (A_β is the limit-ring of A in A_α of the order β.)

THEOREM 139. *If A is an invariant subring of a Boolean σ-ring B, α an ordinal number satisfying $\alpha \leqq \rho$, and $A_{(\alpha)}$ the limit-ring of A in B of the order α, then $A_{(\alpha)}$ is a fundamental extension of A of the order α.*

PROOF. If a_n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) are elements of A, and the sequence consisting of these elements is a fundamental sequence with respect to A, it is, by Theorem 128, also a fundamental sequence with respect to B; hence it is, by Theorem 131, convergent with respect to B; its limit is an element of $A_{(1)}$. Conversely any element of $A_{(1)}$ can be obtained in this way. If we assign to every fundamental sequence in A that element of $A_{(1)}$ which is its limit with respect to B we get a homomorphism γ from the Boolean ring F of the fundamental sequences in A to $A_{(1)}$ of the sort demanded in Definition 19. This proves the theorem for the case $\alpha = 1$. The general theorem follows now by transfinite induction.

THEOREM 140. *Let A and A^* be Boolean rings between which there exists an isomorphism Λ, α and β ordinal numbers satisfying $\beta \leqq \alpha \leqq \rho$, A_β a fundamental extension of A of the order β, and A_α^* a fundamental extension of A^* of the order α. Then there exists exactly one subring R^* of A_α^* such that the isomorphism Λ can be extended to an isomorphism Λ_β between A_β and R^*. Λ_β is uniquely determined, and R^* is a fundamental extension of A^* of order β. If especially $\beta = \alpha$ then $R^* = A_\alpha^*$.*

PROOF. Let A_β^* be a subring of A_α^* which is a fundamental extension of A^* of the order β. That A_β^* exists and is unique follows from Theorem 138. If we put $R^* = A_\beta^*$ it ensues from Lemma 12 and by transfinite induction that the isomorphism Λ_β, demanded by Theorem 140, exists and is unique. The uniqueness of R^* is involved by Theorem 83.

THEOREM 141. *If A is a subring of a Boolean ring B the closure of A in B is as well a subring of B; it is identical with the limit-ring $A_{(\rho)}$ of A in B of the order ρ.*

PROOF. Let a_n be a sequence of elements of $A_{(\rho)}$ which has a limit a with respect to B. Further, for $n = 1, 2, 3, \cdots$ let α_n be the smallest ordinal number which is not larger than ρ and has the property that a_n is contained in $A_{(\alpha_n)}$, by $A_{(\beta)}$ $(\beta \leqq \rho)$ denoted the limit-ring of A in B of the order β. Since ρ is a limit-number we have certainly

$$\alpha_n \neq \rho$$

for $n = 1, 2, 3, \cdots$. Further let α be the smallest ordinal number satisfying the inequality

$$\alpha_n \leqq \alpha \leqq \rho$$

for $n = 1, 2, 3, \cdots$. We have

$$\alpha \neq \rho;$$

for the asumption $\alpha = \rho$ would imply that ρ would be the ordinal number of a finite or countable set, contrary to the definition of ρ. Hence we have also

$$\alpha + 1 \leqq \rho.$$

Now the elements a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ are all contained in $A_{(\alpha)}$. Consequently the element

$$a = {}^{(B)}\lim_{n\to\infty} a_n$$

is contained in $A_{(\alpha+1)}$. Thus we have

$$a \in A_{(\rho)}$$

and it is proved that $A_{(\rho)}$ is a closed subclass of B. On the other side it can be shown by transfinite induction that any subclass of B closed under $\Gamma(\tau(B))$ and containing A contains $A_{(\alpha)}$ whenever $\alpha \leqq \rho$, and by this especially $A_{(\rho)}$. Thus Theorem 141 is proved.

If B is especially the Boolean ring of all sets of real numbers, and A the subclass of B defined by the property that a is an element of A if and only if it is either the empty set or the union of a finite number of sets, every one of which is either an open real interval or consists of exactly one real number (see the example stated after Definition 9), then $A_{(\rho)}$ is the Boolean ring of the Borel sets of real numbers. In this case it is known that the rings $A_{(\alpha)}$ $(\alpha \leqq \rho)$ are all different. Since B is a complete Boolean ring here, $A_{(\alpha)}$ is, by Theorem 139, a fundamental extension of A of the order α. It follows that if A_1 is a first fundamental extension of A, A_1 is not a σ-complete Boolean ring. If we compare this result with the results of §7 of the paper (I), we find that the sequential topology $\tau(A)$ of a Boolean ring A defined by Definition 8, in general cannot be derivated from a neighbourhood-topology satisfying the axioms of Fréchet-Hausdorff.

THEOREM 142. *If A_ρ is a fundamental extension of a Boolean ring A of the order ρ then A_ρ is a Boolean σ-ring.*

PROOF. Let B be a Boolean σ-ring and an invariant extension of A_ρ. That such a Boolean ring B exists follows from Theorem 69. Then A_ρ is, by Theorem 137, the limit-ring of A in B of the order ρ, and it follows from Theorem 141 that A_ρ is closed in B. Hence A_ρ is a Boolean σ-ring, according to Theorem 117.

DEFINITION 23. *An extension $\bar{A}$ of a Boolean ring A is said to be a minimal invariant σ-extension of A, or shorter: a σ-completion of A, if $\bar{A}$ is a Boolean σ-ring invariant over A, and no proper subring of $\bar{A}$ containing A is itself a Boolean σ-ring.*

THEOREM 143. *An extension $\bar{A}$ of a Boolean ring A is a minimal invariant σ-extension of A if and only if $\bar{A}$ is a fundamental extension of A of the order ρ.*

PROOF. If $\bar{A}$ is a minimal invariant σ-extension of A, the limit-ring of A in $\bar{A}$ of the order ρ is, by Theorem 139, a fundamental extension of A of the order ρ; hence it is, by Theorem 142, a Boolean σ-ring, and Definition 23 involves that it cannot be different from $\bar{A}$. If $\bar{A}$ is a fundamental extension of A of the order ρ then $\bar{A}$ is, by Theorem 142, a Boolean σ-ring and, by Theorem 134, a join-extension and by this an invariant extension of A. (Theorem 61.) On the other side $\bar{A}$ is, by Theorems 137 and 141, the closure of A in $\bar{A}$. If R is a σ-subring of $\bar{A}$ containing A then R is, by Theorems 61 and 64, invariant in $\bar{A}$ and, by Theorem 118, closed in $\bar{A}$. Hence $R = \bar{A}$, and it is proved that $\bar{A}$ is a σ-completion of A.

THEOREM 144. *If $\bar{A}$ is a σ-completion of a Boolean ring A, and B an invariant extension of $\bar{A}$, then $\bar{A}$ is the closure of A in B.*

PROOF. See Theorems 137, 141, and 143.

THEOREM 145. *If A is an invariant subring of a Boolean σ-ring B, the closure of A in B is a minimal invariant σ-extension of A.*

PROOF. See Theorems 139, 141, and 143.

THEOREM 146. *If $\bar{A}$ and $\bar{A}^*$ are minimal invariant σ-extensions of the same Boolean ring A then $\bar{A}$ and $\bar{A}^*$ are isomorphic, and there is exactly one isomorphism between $\bar{A}$ and $\bar{A}^*$ carrying every element of A into itself.*

Hence we may say that $\bar{A}$ and $\bar{A}^*$ are abstractly identical.

PROOF. See Theorems 140 and 143.

10. The Sequential Topology $\tau(\Gamma(\tau(A)))$

If A is any Boolean ring, the closure-topology $\Gamma(\tau(A))$ in A, considered in §7, determines a new sequential topology $\tau(\Gamma(\tau(A)))$ in A according to (III), Theorem 15. The closure-topology determined by this sequential topology is identical with $\Gamma(\tau(A))$ or, in other words, the closure-topology $\Gamma(\tau(A))$ and the sequential topology $\tau(\Gamma(\tau(A)))$ are equivalent. (See (III), Definition 8 and Theorem 18.)

LEMMA 14. *If a sequence a_n has a limit a under $\tau(A)$ it has also under $\tau(\Gamma(\tau(A)))$ the limit a and no other limit.*

PROOF. It is obvious that the sequence a_n has the limit a also under $\tau(\Gamma(\tau(A)))$. If $b \neq a$, at the utmost a finite number of terms of the sequence a_n is equal to b, and Theorem 29 involves that the terms of this sequence different from b and the element a together constitute a set closed under $\Gamma(\tau(A))$. The complement of this set is an open set which contains b, but fails to contain infinitely many terms of the sequence a_n. Hence b is certainly no limit of the sequence a_n under $\tau(\Gamma(\tau(A)))$. This completes the proof of Lemma 14.

Further it is obvious that our Theorems 25, 29, and 30 hold also for the sequential topology $\tau(\Gamma(\tau(A)))$. (They hold in any derivative sequential topology.)

THEOREM 147. (Compare (VII), Satz 29.) *If a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ and a are elements of a Boolean ring A then a is a limit of the sequence a_n under $\tau(\Gamma(\tau(A)))$ if and only if every partial sequence of the sequence a_n contains a further partial sequence converging towards a under $\tau(A)$. Hence any sequence of elements of A has at the utmost one limit under $\tau(\Gamma(\tau(A)))$.*

PROOF. If a set open under $\Gamma(\tau(A))$ and containing a fails to contain an infinite partial sequence of the given sequence, no partial sequence of the mentioned partial sequence can converge towards a under $\tau(A)$. Hence if every partial sequence of the given sequence contains a further partial sequence converging towards a under $\tau(A)$, the given sequence has certainly the limit a under $\tau(\Gamma(\tau(A)))$.

Let us suppose conversely that the sequence a_n has the limit a under $\tau(\Gamma(\tau(A)))$. If the sequence a_n had not the property asserted in Theorem 147 we could state a partial sequence a_{n_k} $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ of this sequence containing no further partial sequence converging towards a under $\tau(A)$. Then the generalized Theorem 29 and Lemma 14 involve that the sequence a_{n_k} contains no sequence convergent under $\tau(A)$ at all. Moreover we may suppose that the elements a_{n_k} are all different from a. Thus the elements of A which are different from all elements a_{n_k} form an open set which contains a, but fails to contain infinitely many terms of the sequence a_n. This result would contradict to the supposition that the sequence a_n converges towards a under $\tau(\Gamma(\tau(A)))$.

DEFINITION 24. *If a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ and a are elements of a Boolean ring A, we say that the sequence a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ converges weakly towards a with respect to A, or that a is its weak limit with respect to A, and write*

$$^{(A)}\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} a_n = a$$

if the sequence a_n converges towards a under $\tau(\Gamma(\tau(A)))$.

The words "with respect to A" and the superscript in the sign $^{(A)}\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} a_n$ may be omitted if there is no doubt which Boolean ring is meant.

We have chosen the words "weak convergence" and "weak limit" for convenience although the considered convergence under $\tau(\Gamma(\tau(A)))$ is no analogue of the weak convergence in a linear metric space.

As far as the sequential topology $\tau(A)$ is concerned, we shall use the same terminology and denotation in this paragraph as in the preceding ones.

The sequential topology $\tau(\Gamma(\tau(A)))$ is in general different from the sequential topology $\tau(A)$. Let A be the Boolean ring of those sets of real numbers which

are either empty or unions of finite numbers of right-hand open intervals. (A is identical with the Boolean ring $\mathfrak{b}$ considered after Definition 9.) If μ and ν are real numbers we denote the interval $\mu \leqq \xi < \nu$ by $\langle \mu, \nu)$. Now put

$$a_n = \left\langle \frac{n - 2^m}{2^m}, \frac{n - 2^m + 1}{2^m} \right)$$

for $2^m \leqq n < 2^{m+1}$, $m = 0, 1, 2, 3, \cdots$. a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ are elements of A. If m and n are natural numbers, at least one of the equations

$$a_m < a_n,$$

$$a_m > a_n,$$

and

$$a_m a_n = 0$$

is valid. To a given natural number n_0 there exist at the utmost finitely many natural numbers n such that

$$a_n > a_{n_0}.$$

Hence any partial sequence b_n of the sequence a_n contains at least either a partial sequence c_n satisfying

$$c_{n+1} < c_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{67}$$

or a partial sequence c_n satisfying

$$c_k c_l = 0 \qquad (k, l = 1, 2, 3, \cdots, k \neq l). \tag{68}$$

(67) as well as (68) implies

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

(See Theorem 116.) Hence we have

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} a_n = 0.$$

On the other side we have

$$\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} a_n = a_1 \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots),$$

thus

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = a_1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

and

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = a_1.$$

Since $a_1 \neq 0$ the equation $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ is not valid.

Theorem 148. *If $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} a_n$ exists then it is an interelement of the sequence a_n and of any partial sequence of this sequence.*

Proof. See Theorems 27 and 147.

Now it is obvious that our Theorems 50, 87, 92, and 115 are valid also for the weak convergence. The same holds for Theorem 91 if it is pronounced only for convergent sequences. I.e. we have

Theorem 149. *If $a_n < b_n$ for $n = 1, 2, 3, \cdots$, and $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} a_n$ and $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} b_n$ exist, then*

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} a_n < \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} b_n .$$

Proof. We have for $n = 1, 2, 3, \cdots$

$$a_n = a_n b_n ,$$

hence, by the generalized Theorem 115,

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} a_n = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} b_n$$

proving Theorem 149.

If a_{mn} is a double sequence in a Boolean ring A, Θ the class of ordered couples of natural numbers for which the sign a_{mn} is defined, and a an element of A, we say that the double sequence a_{mn} converges weakly towards a, or has the weak limit a, and write

$$^{(A)}\operatorname*{Lim}_{\substack{m,n\to\infty\\(m,n)\,\epsilon\,\Theta}} a_{mn} = a,$$

if to any open set containing a there can be assigned a natural number k such that a_{mn} is contained in this open set for $m \geqq k$, $n \geqq k$, $(m, n)\ \epsilon\ \Theta$. If Θ is the class of all ordered couples of natural numbers, we write simply $^{(A)}\operatorname*{Lim}_{m,n\to\infty} a_{mn}$ instead of $^{(A)}\operatorname*{Lim}_{\substack{m,n\to\infty\\(m,n)\,\epsilon\,\Theta}} a_{mn}$. In both cases the superscript (A) may be omitted if there is no doubt which Boolean ring is meant.

Theorems 25, 29′ (8), and 123 hold also for weakly-convergent double sequences. Moreover Theorem 123 pronounced for weakly-convergent double sequences can be inverted. I.e. if $m_k \to \infty$, $n_k \to \infty$ for $k \to \infty$ implies $\operatorname*{Lim}_{k\to\infty} a_{m_k n_k} = a$, then $\operatorname*{Lim}_{m,n\to\infty} a_{mn} = a$. (To prove this proposition is not difficult.) In particular if $m_k \to \infty$, $n_k \to \infty$ for $k \to \infty$ implies $\lim_{k\to\infty} a_{m_k n_k} = a$, we have certainly $\operatorname*{Lim}_{m,n\to\infty} a_{mn} = a$. On the other hand compare the remark after Theorem 123.—Any double sequence of a Boolean ring A has at the utmost one weak limit with respect to A.

Now it is clear that also Theorems 50, 87, 92, 115 and 149 hold for weakly-convergent double sequences.

Definition 25. *A sequence of elements a_n of a Boolean ring A is said to be a weak fundamental sequence with respect to A if*

$$^{(A)}\operatorname*{Lim}_{m,n\to\infty} (a_m + a_n) = 0.$$

Theorems 127, 128, and 132 continue to be right if we replace the notions of "fundamental sequence" and "convergence" wherever they appear, by the notions of "weak fundamental sequence" and "weak convergence."

Theorem 150. *Any two weakly-concurrent fundamental sequences are concurrent.*

Proof. If a_n and b_n are fundamental sequences, and

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0,$$

then there exists, by Theorem 147, a sequence n_k of natural numbers different from each other such that

$$\lim_{k\to\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) = 0. \tag{69}$$

On the other side we have, by Theorem 123 and Definition 17,

$$\lim_{k\to\infty} (a_k + a_{n_k}) = 0 \tag{70}$$

and

$$\lim_{k\to\infty} (b_k + b_{n_k}) = 0. \tag{71}$$

From (69), (70), and (71) we get, according to Theorem 115,

$$\lim_{k\to\infty} (a_k + b_k) = 0.$$

Theorem 151. *If b_n is a fundamental sequence, and a_n a sequence of the property that every partial sequence of the sequence a_n contains a fundamental sequence weakly-concurrent with the fundamental sequence b_n, then a_n is a weak fundamental sequence weakly-concurrent with the fundamental sequence b_n.*

Proof. First we observe that any partial sequence of a fundamental sequence is a fundamental sequence concurrent with the whole sequence. This can be easily concluded from Definition 17 and from Theorems 29′ and 123. Now if we notice Theorems 147 and 150, we find that the suppositions of Theorem 151 involve

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0.$$

Since

$$a_m + a_n = (a_m + b_m) + (a_n + b_n) + (b_m + b_n),$$

and

$$\lim_{m,n\to\infty} (b_m + b_n) = 0,$$

we have

$$\lim_{m,n\to\infty} (a_m + a_n) = 0,$$

according to the generalized Theorem 115.

On the other hand it is an open question whether Theorem 151 can be inverted, i.e. whether every weak fundamental sequence of a Boolean ring contains a fundamental sequence in the sense of Definition 17. If this inversion is true, it follows that every weak fundamental sequence of a Boolean σ-ring is weakly-convergent. If it were not true then it could occur that a Boolean ring (if you want even a complete one) could not be invariantly extended to a Boolean ring in which every weak fundamental sequence is weakly-convergent.

PRAGUE

REFERENCES

(I) D. van Dantzig: *Zur topologischen Algebra.* I. Komplettierungstheorie. Mathematische Annalen **107** (1933), pp. 587-626.

(II) Garrett Birkhoff: *On the Structure of Abstract Algebras.* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **31** (1935), pp. 433-454.

(III) Garrett Birkhoff: *On the Combination of Topologies.* Fundamenta Mathematicae **26** (1936), pp. 156-166.

(IV) Fritz Klein: *Boole-Schrödersche Verbände.* Deutsche Mathematik **1** (1936), pp. 528-537.

(V) M. H. Stone: *The Theory of Representations for Boolean Algebras.* Transactions of the American Mathematical Society **40** (1936), pp. 37-111.

(VI) Garrett Birkhoff: *Rings of Sets.* Duke Mathematical Journal **3** (1937), pp. 443-454.

(VII) L. V. Kantorovitch: *Lineare halbgeordnete Räume.* Recueil Mathématique **2** (44) (1937), pp. 121-168.

(VIII) Garrett Birkhoff: *Lattices and their Applications.* Bulletin of the American Mathematical Society **44** (1938), pp. 793-800.

EXTRAIT DE „STUDIA MATHEMATICA", T. V. (1934). 4

Über die Dimension linearer Räume

von

H. LÖWIG (Prag).

In dieser Abhandlung mache ich den Vorschlag, zwei Begriffe „affine Dimensionszahl eines linearen Raumes" und „metrische Dimensionszahl eines linearen metrischen Raumes" durch folgende Definitionen einzuführen:

Definition 1. *Unter der affinen Dimensionszahl eines linearen Raumes $\mathfrak{R}$ verstehe man die kleinste Kardinalzahl $\aleph$ von der Eigenschaft, daß es mindestens eine Teilmenge von $\mathfrak{R}$ von der Mächtigkeit $\aleph$ gibt, deren lineare Hülle mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt.*

Definition 2. *Unter der metrischen Dimensionszahl eines linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ verstehe man die kleinste Kardinalzahl $\aleph$ von der Eigenschaft, daß es mindestens eine Teilmenge von $\mathfrak{R}$ von der Mächtigkeit $\aleph$ gibt, deren abgeschlossene lineare Hülle mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt.*

Unter der linearen Hülle einer Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines linearen Raumes ist dabei die lineare Mannigfaltigkeit aller Linearkombinationen endlich vieler Elemente von $\mathfrak{M}$ zu verstehen. (Linearkombinationen mit beliebigen komplexen Koeffizienten, wenn es sich um einen komplexen linearen Raum, und mit reellen Koeffizienten, wenn es sich um einen reellen linearen Raum handelt). Unter der abgeschlossenen linearen Hülle einer Teilmenge eines linearen metrischen Raumes ist die lineare Mannigfaltigkeit der starken Häufungsstellen der einfachen linearen Hülle dieser Menge zu verstehen. (Die Worte „lineare Hülle" und „abgeschlossene lineare Hülle" werden hier in Anlehnung an die Abhandlung von F. HAUSDORFF „Zur Theorie der linearen metrischen Räume", J. reine angew. Math. 167 (1932), p. 294—311, insb. p. 295 gebraucht. Auch sonst wird in dieser Arbeit vielfach die in der zitierten HAUSDORFF'schen Abhandlung gebrauchte Terminologie verwendet werden). Es ist klar, daß die affine Dimensionszahl eines linearen metrischen Raumes niemals kleiner sein kann als seine metrische Dimensionszahl.

Im folgenden soll auseinandergesetzt werden, welcher Zusammenhang zwischen den Begriffen „affine Dimensionszahl eines linearen Raumes“ und „metrische Dimensionszahl eines linearen metrischen Raumes“ und denjenigen Teilmengen eines linearen bzw. linearen metrischen Raumes besteht, welche man als „Basen“ bzw. als „Grundmengen“ zu bezeichnen pflegt. Bei diesen Erörterungen wird der folgende Satz der Mengenlehre benützt: *Für jede unendliche Kardinalzahl $\aleph$ ist $\aleph^2 = \aleph$.*

Definition 3. *Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines linearen Raumes $\mathfrak{R}$ heiße eine Basis von $\mathfrak{R}$, wenn endlich viele Elemente von $\mathfrak{M}$ stets linear unabhängig sind und die lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt.*

Bekanntlich besitzt jeder lineare Raum mindestens eine Basis.

Satz 1. *Jede Basis eines linearen Raumes $\mathfrak{R}$ hat eine Mächtigkeit, welche der affinen Dimensionszahl von $\mathfrak{R}$ gleich ist.*

Um diesen Satz zu begründen, genügt es zu beweisen, daß zwei Basen eines linearen Raumes stets die gleiche Mächtigkeit besitzen; denn jede Teilmenge von $\mathfrak{R}$, deren lineare Hülle $\mathfrak{R}$ ist, enthält eine Basis von $\mathfrak{R}$. Es seien also $\mathfrak{B}^{(1)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ zwei Basen von $\mathfrak{R}$. Dann kann jedes Element von $\mathfrak{B}^{(1)}$ auf genau eine Weise als Linearkombination endlich vieler Elemente von $\mathfrak{B}^{(2)}$ dargestellt werden. In diesen Linearkombinationen muss auch jedes Element von $\mathfrak{B}^{(2)}$ mindestens einmal wirklich vorkommen; ein Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{B}^{(2)}$, welches in keiner dieser Linearkombinationen vorkäme, könnte man nämlich durch endlich viele Elemente von $\mathfrak{B}^{(1)}$ und daher auch durch endlich viele von $\mathfrak{x}$ verschiedene Elemente von $\mathfrak{B}^{(2)}$ linear ausdrücken: es wären dann also nicht endlich viele Elemente von $\mathfrak{B}^{(2)}$ stets linear unabhängig. Also ist $\mathfrak{B}^{(2)}$ die Vereinigungsmenge einer $\mathfrak{B}^{(1)}$ äquivalenten Gesamtheit endlicher Mengen. Sind daher $\aleph^{(1)}$ und $\aleph^{(2)}$ die Mächtigkeiten von $\mathfrak{B}^{(1)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ und ist $\aleph_0$ die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen, dann ist

$$(1) \qquad \aleph^{(2)} \leq \aleph_0 \aleph^{(1)}.$$

Nun werde angenommen, daß $\aleph^{(1)}$ und $\aleph^{(2)}$ beide unendlich sind. Dann folgt aus (1)

$$\aleph^{(2)} \leq \aleph^{(1)}.$$

Da man ebenso die Ungleichung $\aleph^{(1)} \leq \aleph^{(2)}$ beweisen kann, ergibt sich die zu beweisende Gleichung

$$(2) \qquad \aleph^{(2)} = \aleph^{(1)}.$$

Daß aber Gleichung (2) auch richtig ist, wenn mindestens eine der beiden Kardinalzahlen $\aleph^{(1)}$ und $\aleph^{(2)}$ endlich ist, kann als bekannt angesehen werden.

Satz 2. *Ein linearer Raum $\mathfrak{R}$, der nicht nur aus einem Nullelement besteht, hat die Mächtigkeit des Kontinuums, wenn seine affine Dimensionszahl kleiner als die Mächtigkeit des Kontinuums ist, und sonst eine Mächtigkeit, welche gleich dieser affinen Dimensionszahl ist.*

Beim Beweise können wir uns auf den Fall beschränken, daß die affine Dimensionszahl des Raumes unendlich ist. Wir wollen sie mit $\aleph$ bezeichnen. Es sei weiter $\mathfrak{M}$ eine Basis von $\mathfrak{R}$; diese hat dann nach Satz 1 die Mächtigkeit $\aleph$. Die Menge aller Teilmengen von $\mathfrak{M}$, welche aus n Elementen bestehen (n eine natürliche Zahl), hat offenbar genau die Mächtigkeit $\aleph^n = \aleph$. Anderseits hat die Menge der Belegungen einer solchen Menge von n Elementen von $\mathfrak{M}$ mit der Menge der von Null verschiedenen reellen (oder komplexen) Zahlen die Mächtigkeit des Kontinuums. Also hat die Menge der Linearkombinationen von genau n Elementen von $\mathfrak{M}$ die Mächtigkeit $\aleph_a \aleph$, wenn $\aleph_a$ die Mächtigkeit des Kontinuums ist. $\mathfrak{R}$ selbst hat daher die Mächtigkeit $\aleph_0 \aleph_a \aleph$, d. h. wieder die Mächtigkeit $\aleph_a \aleph$. Da aber

$$\aleph_a \aleph = \mathrm{Max}\,(\aleph_a, \aleph)$$

ist, ist die Mächtigkeit von $\mathfrak{R}$ gleich der größeren der beiden Kardinalzahlen $\aleph_a$ und $\aleph$. Das wurde aber in Satz 2 gerade behauptet.

Definition 4. *Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ heiße eine Grundmenge von $\mathfrak{R}$, wenn erstens kein Element von $\mathfrak{M}$ der abgeschlossenen linearen Hülle der übrigen Elemente von $\mathfrak{M}$ angehört und zweitens die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt.*

F. Hausdorff verlangt in der bereits zitierten Abhandlung von einer Grundmenge $\mathfrak{M}$ nur, daß endlich viele ihrer Elemente stets linear unabhängig seien und daß die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{R}$ zusammenfalle.

S. Banach nennt auf Seite 58 seines Buches „Théorie des opérations linéaires" (Warszawa 1932) eine Grundmenge (ensemble fondamental) von $\mathfrak{R}$ überhaupt jede Teilmenge von $\mathfrak{R}$, deren abgeschlossene lineare Hülle mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt.

Satz 3. *Jede Grundmenge eines linearen Raumes $\mathfrak{R}$ besitzt eine Mächtigkeit, welche gleich der metrischen Dimensionszahl von $\mathfrak{R}$ ist.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{G}$ eine Grundmenge von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{R}$, deren Mächtigkeit gleich der metrischen Dimensionszahl von $\mathfrak{R}$ ist und deren abgeschlossene lineare Hülle mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt. Dann ist jedes Element von $\mathfrak{M}$ starkes Grenzelement einer Folge von Linearkombinationen endlich vieler Elemente von $\mathfrak{G}$. Also gehört jedes Element von $\mathfrak{M}$ der abgeschlossenen linearen Hülle einer höchstens abzählbaren Teilmenge von $\mathfrak{G}$ an. In diesen höchstens abzählbaren Teilmengen von $\mathfrak{G}$, welche so den Elementen von $\mathfrak{M}$ zugeordnet sind, muß auch jedes Element von $\mathfrak{G}$ mindestens einmal wirklich vorkommen; aus der entgegengesetzten Annahme würde nämlich folgen, daß ein Element von $\mathfrak{G}$ der abgeschlossenen linearen Hülle der übrigen Elemente von $\mathfrak{G}$ angehört. Also ist $\mathfrak{G}$ die Vereinigungsmenge einer $\mathfrak{M}$ äquivalenten Gesamtheit höchstens abzählbarer Mengen. Ist daher $\aleph^{(1)}$ die Mächtigkeit von $\mathfrak{M}$ und $\aleph^{(2)}$ die Mächtigkeit von $\mathfrak{G}$ und ist $\aleph^{(1)}$ unendlich, dann kann man analog wie beim Beweise des Satzes 1 schließen, daß

$$\aleph^{(2)} \leq \aleph^{(1)}$$

ist. Nun ist aber $\aleph^{(1)}$ die metrische Dimensionszahl von $\mathfrak{R}$. Nach Definition 2 muß daher

$$\aleph^{(2)} = \aleph^{(1)}$$

sein, wie in Satz 3 behauptet wurde.

In dem Falle, daß $\mathfrak{R}$ *euklidisch* und vollständig ist, ist jedes vollständige normierte Orthogonalsystem eine Grundmenge.

(Ein linearer metrischer Raum wird hier euklidisch genannt, wenn es in ihm eine symmetrische skalare bilineare Funktion (im Falle eines komplexen linearen metrischen Raumes eine hermiteisch symmetrische skalare bilineare Funktion) $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ mit

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = |\mathfrak{x}|^2$$

für alle $\mathfrak{x}$ gibt. Zwei Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eines euklidischen Raumes heißen orthogonal, wenn $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ ist. Eine Menge $\mathfrak{M}$ eines vollständigen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ heißt ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem, wenn die Elemente von $\mathfrak{M}$ alle den absoluten Betrag Eins haben, paarweise zueinander orthogonal sind und es kein Element von $\mathfrak{R}$ gibt, welches vom Nullelement verschieden und zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist. Daß es in jedem vollständigen euklidischen Raume mindestens ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem gibt, kann man mit Hilfe des Auswahlprinzips leicht einsehen. Der Leser sei hier auch auf die Arbeit des Verfassers „Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl" verwiesen, die in den „Acta Litt. Sci. Szeged" 7 (1934), p. 1—33 erschienen ist.

Also hat jedes vollständige normierte Orthogonalsystem eines vollständigen euklidischen Raumes eine Mächtigkeit, welche gleich der metrischen Dimensionszahl des Raumes ist.

Ob jeder lineare metrische Raum eine Grundmenge im Sinne unserer Definition 4 besitzt, konnte nicht entschieden werden. (Man könnte von einer Wohlordnung des Raumes ausgehen und in dieser die Menge aller derjenigen Elemente betrachten, welche nicht der abgeschlossenen linearen Hülle der Menge ihrer Vorgänger angehören. Die so ausgesonderte Menge muss aber keine Grundmenge des Raumes im Sinne unserer Definition 4 sein).

Satz 4. *Eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ eines linearen metrischen Raumes und ihre abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{P}}$ haben stets die gleiche metrische Dimensionszahl.*

Es sei $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{P}$, deren abgeschlossene Hülle in $\overline{\mathfrak{P}}$ mit $\overline{\mathfrak{P}}$ zusammenfällt und deren Mächtigkeit möglichst klein ist. Dann fällt offenbar auch die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{M}$ in $\overline{\mathfrak{P}}$ mit $\overline{\mathfrak{P}}$ zusammen. Also ist die metrische Dimensionszahl von $\overline{\mathfrak{P}}$ höchstens gleich der metrischen Dimensionszahl von $\mathfrak{P}$. Anderseits kann man zu jeder unendlichen Teilmenge von $\overline{\mathfrak{P}}$, deren abgeschlossene Hülle mit $\overline{\mathfrak{P}}$ zusammenfällt, eine ebensolche Teilmenge von $\mathfrak{P}$ von gleicher Mächtigkeit angeben; man braucht nur jedes Element $\mathfrak{x}$ der erstgenannten Menge durch eine gegen $\mathfrak{x}$ stark konvergente Folge von Elementen von $\mathfrak{P}$ zu ersetzen. Damit ist Satz 4 bewiesen; denn auf den hier nicht berücksichtigten Fall, dass $\mathfrak{P}$ oder $\overline{\mathfrak{P}}$ endlichdimensional ist, braucht nicht niegegangen zu werden.

Bekanntlich kann man jeden linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}$ zu einem vollständigen linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}^*$ derart erweitern, dass $\mathfrak{R}^*$ die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}^*$ ist. *In diesem Falle haben also $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^*$ stets die gleiche metrische Dimensionszahl.*

(Reçu par la Rédaction le 17. 3. 1934).